Θεωρία δακτυλίων και modules (2023)

Ασκήσεις

Φυλλάδιο 8ο

Άσκηση 1η, Να αποδείξετε ότι $2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ ως $\mathbb{Z}$-modules, ενώ αυτό δεν ισχύει αν θεωρήσουμε τα $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$ ως δακτυλίους

Άσκηση 2η Αν $\varphi: M \to N$ ομομορφισμός R-modules να αποδείξετε ότι $\ker\varphi \leq M$, $\operatorname{Im}\varphi \leq N$ και στη συνέχεια ότι $\frac{M}{\ker\varphi} \cong \operatorname{Im}\varphi$

Άσκηση 3η Αν M ένα R-module και $\varphi: M \to M$ ένας R-ενδομορφισμός του M τ.ω. $\varphi^2 = \varphi$, να αποδείξετε ότι $\ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi = M$

Άσκηση 4η Αν M και N ελεύθερα R-modules να αποδείξετε ότι και το $M \times N$ είναι ελεύθερο R-module.

Άσκηση 5η Αν $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0, 1$, d square-free να αποδείξετε ότι το $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, είναι ελεύθερο και να βρείτε μια βάση αυτού.

Άσκηση 6η Να αποδείξετε ότι το $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$, δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο

Παράδοση στις 27-11-2023

Ο Διδάσκων Ιωάννης Ανζωνιάδης