Δακτύλιοι και modules 2023

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
Φυλλαδίου 7°

Άσκηση 1η

Έστω $f \in Rad(I) \Rightarrow (\exists\, m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $f^m \in I)$

Το $\mathbb{V}(I)$ ορίζεται ως:

$$= \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \,/\, g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0 \text{ για κάθε } g \in I\}$$

Άρα και για το f^m, (αφού $f^m \in I$), ισχύει

$$(f^m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0, \text{ για κάθε } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{V}(I))$$

$$\Rightarrow [f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0, \text{ για κάθε } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{V}(I)]$$

$\Rightarrow f \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$, δηλαδή

$$Rad(I) \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$$

Δακτύλιοι και modules 2023
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 7°

Άσκηση 2α

Είναι φανερό ότι, για κάθε $\ell \in \{1,2,\dots,r\}$ ισχύει $\prod_{k=1}^{r} I_k \subseteq I_\ell$

Επομένως, $\mathbb{V}(I_\ell) \subseteq \mathbb{V}(\prod_{k=1}^{r} I_k)$

και αυτό για κάθε $\ell = 1,2,\dots,r$.

Άρα και $\bigcup_{\ell=1}^{r} \mathbb{V}(I_\ell) \subseteq \mathbb{V}(\prod_{\ell=1}^{r} I_\ell)$ (1)

Αντίστροφα

Έστω $P \in \mathbb{V}(\prod_{k=1}^{r} I_k)$. Υποθέτουμε ότι το $P \notin \bigcup_{k=1}^{r} \mathbb{V}(I_k)$. Άρα

$$P \notin \mathbb{V}(I_k),\ \forall k = 1,2,\dots,r$$

Επομένως για κάθε $k \in \{1,2,\dots,r\}$ $\exists$ πολυώνυμο $f_k \in I_k$ τ.ω. $f_k(P) \neq 0$.

Αν λοιπόν $F := f_1 \cdot f_2 \cdots f_k$, τότε έχουμε $F(P) = f_1(P) f_2(P) \cdots f_k(P) \neq 0$, άτοπο, αφού $F = f_1 f_2 \cdots f_k \in \prod_{k=1}^{r} I_k$ και $P \in \mathbb{V}(\prod_{k=1}^{r} I_k)$ //

Δακτύλιοι και modules 2023

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 7ου

Άσκηση 3η

M maximal του $\mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_n]$

$\Rightarrow M \neq \mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_n]$.

Άρα $\mathbb{V}(M) \neq \emptyset$. Επομένως

υπάρχει $P \in \mathbb{V}(M)$, δηλαδή

$$\{P\} \subseteq \mathbb{V}(M)$$

Συνεπώς, $\mathbb{I}(\{P\}) \supseteq \mathbb{I}(\mathbb{V}(M))$ (1)

Το M είναι maximal $\Rightarrow$ M πρώτο δηλαδή $\mathrm{Rad}(M) = M$.

Σύμφωνα με το Nulstellensatz

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}(M)) = \mathrm{Rad}\, M = M$$

Από την (1) $\Rightarrow$ $\mathbb{I}(\{P\}) \supseteq M$

Όμως το M είναι maximal και το $\mathbb{I}(\{P\}) \neq \mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_n]$

Άρα $M = \mathbb{I}(\{P\})$

//

Δακτύλιοι και modules 2023
ΛΥΣΕΙΣ ασκήσεων
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7ο

Άσκηση 4η

Εδώ υποθέτουμε ότι αναλύεται και κατατάσσουμε σε άτοπο εξετάζοντας δύο περιπτώσεις

Ανάλογη, άσκηση έγινε στο μάθημα "Άλγεβρα ΙΙ"

Δακτύλιοι και modules 2023

ΛΥΣΕΙΣ ασκήσεων 7ου φυλλαδίου

Άσκηση 5η

Είναι φανερό ότι ότι,

$$X = \mathbb{V}(X\cdot Y,\ X^2+Y^2+Z^2-1) =$$

$$\mathbb{V}(X,\ X^2+Y^2+Z^2-1) \cup \mathbb{V}(Y,\ X^2+Y^2+Z^2-1)$$

$$= \mathbb{V}(X,\ Y^2+Z^2-1) \cup \mathbb{V}(Y,\ X^2+Z^2-1)$$

$$= V_1 \cup V_2$$

Θα αποδείξουμε ότι τα ιδεώδη $\langle X, Y^2+Z^2-1\rangle$ και $\langle Y, X^2+Z^2-1\rangle$ είναι πρώτα οπότε τα αλγεβρικά σύνολα V_1 και V_2 είναι αναγωγά.

Λόγω συμμετρίας, αρκεί να το κάνουμε για ένα από αυτά

$$\frac{\mathbb{C}[X,Y,Z]}{\langle X, Y^2+Z^2-1\rangle} \cong \frac{\frac{\mathbb{C}[X,Y,Z]}{\langle X\rangle}}{\frac{\langle X, Y^2+Z^2-1\rangle}{\langle X\rangle}} \cong$$

$$\cong \frac{\mathbb{C}[Y,Z]}{\langle Y^2+Z^2-1\rangle}$$ και... Εφαρμόζουμε την άσκηση 4