ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ ΚΑΙ MODULES

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6° (2023)

Λύσεις ασκήσεων

Άσκηση 1η

(i) Αν $x \in R$, $x \neq 0$, x μηδενοδύναμο

$\Rightarrow$ Υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x^n = 0$

Έστω n ο ελάχ. φυσικός τ.ω. $x^n = 0$

Άρα $x \cdot x^{n-1} = 0 \Rightarrow x \cdot y = 0$ $(y := x^{n-1} \neq 0)$

$\Rightarrow x$ διαιρέτης του μηδενός.

(ii) $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ Τα μόνα μηδενοδύναμα στοιχεία

είναι το $[0]$ και το $[2]$, αφού $[2]^2 = [4] = [0]$.

Στον δακτύλιο

$\dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ δεν υπάρχουν μηδενοδύναμα

στοιχεία $[2]^k = \begin{cases} [2], & \text{για } k \text{ περιττό} \\ [4], & \text{για } k \text{ άρτιο} \end{cases}$ $(k \in \mathbb{N})$

Άρα το $[2]$ όχι μηδενοδύναμο.

Ανάλογα, $[3]^k = [3]$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$

Συνεπώς ούτε το $[3]$ είναι μηδενοδύναμο.

Όμως $[2] \cdot [3] = [6] = [0]$ είναι διαιρέτες του μηδενός

Συνεπώς στο (i) δεν ισχύει το αντίστροφο.

<u>Δακτύλιοι</u> <u>και</u> <u>modules</u> (2023)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

<u>φυλλάδιο 6ο</u>

<u>Άσκηση 2η</u> Αν $x \in N$ και $r \in R$, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ τ.ω $x^n = 0$. Επομένως και $r^n \cdot x^n = r^n \cdot 0 = 0$, δηλαδή $(r \cdot x)^n = 0 \Longrightarrow r \cdot x$ μηδενοδύναμο.

Τώρα αν $x, y \in N \Rightarrow \exists\, m = m(x) \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x^m =$
και $\exists\, n = n(y) \in \mathbb{N}$ τ.ω $y^n = 0$.

Από τον διωνυμικό τύπο του Νεύτωνα (ο R είναι μεταθετικός!) έχουμε, για εκθέτη $m+n-1$ (ή και μεγαλύτερο, αν θέλουμε) έχουμε

$$(x-y)^{m+n-1} = 0 \qquad (\text{γιατί;})$$

$$\Longrightarrow (x-y) \in N \Longrightarrow \underline{\underline{N \trianglelefteq R}}$$

Έστω τώρα, $\bar{x} = x + N \in R/N$

Αν το $\bar{x}$ είναι μηδενοδύναμο $\Longrightarrow \bar{x}^n = 0$, (για κάποιο n).

Αλλά $\bar{x}^n = x^n + N$, οπότε $\bar{x}^n = \bar{0} = 0 + N$

$\Longrightarrow x^n \in N$.

Το x^n είναι μηδενοδύναμο στοιχείο του R, (αφού $x^n \in N$). Επομένως, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τ.ω $(x^n)^m = 0 \Longrightarrow x^{n \cdot m} = 0$

$\Longrightarrow x \in N$, δηλαδή το $\bar{x} = \bar{0}$.

Δακτύλιοι και Modules (2023)

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6°

<u>λύσεις ασκήσεων</u>

<u>Άσκηση 3η</u> Έστω $N' := \bigcap_{P \in Spec(R)} P$

Αν $x \in N \Rightarrow x^n = 0$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$

Για κάθε $P \in Spec(R)$, ισχύει $0 \in P$,

δηλαδή $x^n \in P$, για κάθε $P \in Spec(R)$

Το P είναι πρώτο, άρα $x \in P$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{P \in Spec(R)} P = N' \Longrightarrow \boxed{N \subseteq N'}$ (1)

Αντίστροφα. Έστω ότι το $x \notin N$.

Θεωρούμε το σύνολο

$\Sigma = \{ A \trianglelefteq R \mid x^n \notin A \quad \forall n \in \mathbb{N} \}$ $(\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\})$

Το $\Sigma \neq \emptyset$, αφού το $\langle 0 \rangle \in \Sigma$

Κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του Σ, έχει ένα άνω-φράγμα στο Σ

(Όπως το κάναμε στο μάθημα)

Επομένως, από το Λήμμα του Zorn, έπεται ότι το Σ έχει maximal στοιχεία.

Έστω P ένα maximal στοιχείο του Σ

Θα αποδ. ότι $P \in Spec(R)$

Υποθ. ότι $a, b \notin P \Rightarrow P \subsetneq P + \langle a \rangle \subseteq R$

και $P \subsetneq P + \langle b \rangle \subseteq R$

Επομένως $P + \langle a \rangle, P + \langle b \rangle \notin \Sigma$

Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$

Συνέχεια της άσκησης 3 (ΛΥΣΕΙΣ φυλ. 6

τ.ω. $x^m \in P + \langle a \rangle$ και $x^n \in P + \langle b \rangle$.

Επομένως, $x^{m+n} = x^m \cdot x^n \in (P + \langle a \rangle)(P + \langle b \rangle)$
$= P + \langle ab \rangle$

Αυτό σημαίνει ότι το
$P + \langle ab \rangle \notin \Sigma \Rightarrow a \cdot b \notin P$

Άρα, έχουμε ένα πρώτο ιδεώδες του R
($P \in Spec(R)$ και $x \notin P$ (αφού $P \in \Sigma$)),

δηλαδή το $x \notin N'$
Αυτό σημαίνει ότι, αν $x \in N' \Rightarrow x \in N$,
$\Rightarrow$ $\boxed{N' \subseteq N}$ (2)

Από (1) ∧ (2) $\Rightarrow N = N'$

Λύση της άσκησης 4 (φυλλάδιο 6ο)

Έστω x ταυτοδύναμο του R.

Επομένως, $x^2 = x \Rightarrow x(1-x) = 0$

Δεν είναι δυνατόν και τα δύο στοιχεία x, $1-x$ να ανήκουν στο μοναδικό maximal, έστω M, του R.
(Αν $x \in M$ και $1-x \in M \Rightarrow (1-x) + x = 1 \in M$, άτοπο)
Τώρα, αν $x \notin M$, τότε $x \in R \setminus M = R^*$,
(αφού R τοπικός) $\Rightarrow x^{-1}[x(1-x)] = 0 \Rightarrow 1 - x = 0$
$\Rightarrow \underline{\underline{x = 1}}$ Αν πάλι,

$(1-x) \notin M \Rightarrow (1-x) \in R \setminus M = R^* \Rightarrow [x(1-x)](1-x)^{-1} = 0$
$\Rightarrow \underline{\underline{x = 0}}$

ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ και MODULES
Χειμερινό 2023
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6ο
(συνέχεια)

Άσκηση 5

Θα το αποδείξουμε, επαγωγικά ως προς το n, $n \geq 2$

Αποδ. για $\underline{n=2}$

Θα αποδείξουμε ότι $\underline{\mathbb{V}(I \cap J) = \mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J)}$

Προφανώς $\left.\begin{array}{l} I \cap J \subseteq I \\ \text{και } I \cap J \subseteq J \end{array}\right\} \Rightarrow$ άρα

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{V}(I \cap J) \\ \text{και } \mathbb{V}(J) \subseteq \mathbb{V}(I \cap J) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J) \subseteq \mathbb{V}(I \cap J)} \quad (1)$$

Έστω $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{V}(I \cap J)$.

Υποθέτουμε ότι το $\bar{\alpha} \notin \mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J)$. (*)

Θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Από (*) $\Rightarrow \left[\bar{\alpha} \notin \mathbb{V}(I) \text{ και } \bar{\alpha} \notin \mathbb{V}(J)\right]$

Τώρα $\left.\begin{array}{l} \bar{\alpha} \notin \mathbb{V}(I) \Rightarrow \exists f \in I \text{ τ.ω. } f(\bar{\alpha}) \neq 0 \\ \text{το } \bar{\alpha} \notin \mathbb{V}(J) \Rightarrow \exists g \in J \text{ τω } g(\bar{\alpha}) \neq 0 \end{array}\right\}$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $f \cdot g$. $I \trianglelefteq R$, $J \trianglelefteq R$

Επομένως $f \cdot g \in I$ και $f \cdot g \in J \Rightarrow f \cdot g \in I \cap J$

Αλλά $\bar{\alpha} \in \mathbb{V}(I \cap J) \Rightarrow$ και για το $f \cdot g$ ισχύει $f(\bar{\alpha}) \cdot g(\bar{\alpha}) = 0$,

άτοπο, Άρα $\bar{\alpha} \in \mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J) \Rightarrow$

$\mathbb{V}(I \cap J) \subseteq \mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J) \Rightarrow$ η ισότητα

ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ και Modules
ΛΥΣΕΙΣ Ασκήσεων
Φυλλάδιο 6°

Άσκηση 6η

Στο(ii) Το $X \cdot Y \in I = <XY>$, αλλά
$X \notin <XY>$ και $Y \notin <XY>$ (γιατί;)
$\Rightarrow$ Το I όχι πρώτο
Επομένως και όχι πρωταρχικό

(iii) Θα αποδ. ότι είναι ριζικό ιδεώδες του $K[X,Y]$.
Πάντοτε ισχύει:
$$<X \cdot Y> \subseteq Rad(<X \cdot Y>) \quad (1)$$
Έστω τώρα $f \in Rad(<X \cdot Y>) \Rightarrow$
$\exists m \in \mathbb{N}$ τ.ω.
$$f^m \in <X \cdot Y> = <X> \cdot <Y> \subseteq <X> \cap <Y>$$
$\Rightarrow f^m \in <X>$ και $f^m \in <Y>$
$\Rightarrow f^m = X \cdot g(X,Y)$ και $f^m = Y \cdot h(X,Y) \Rightarrow X | f^m$ και $Y | f^m$
Το X είναι ανάγωγο στοιχείο του $K[X,Y]$
$K[X,Y]$ Π.Μ.Α $\Rightarrow$ $X | f$ και ανάλογα $Y | f$

Αλλά X και Y είναι ανάγωγα και πρώτα μεταξύ τους
$\Rightarrow X \cdot Y | f \Rightarrow f \in <X \cdot Y> \Rightarrow$
$$Rad(<XY>) \subseteq <X \cdot Y> \quad (2)$$

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ η ισότητα