

ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ και Modules
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6^ο 2023
Άσκσεις

(R , όπως πάντα, πλέον, μεζαδετικός
με μοναδιαίο)

Άσκηση 1^η Να αποδείξετε ότι

- (i) Κάθε μηδενοδύναμο στοιχείο του R , ($x \neq 0$)
είναι διαιρέτης του μηδενός.
Ισχύει το αντίστροφο.
(ii) Να βρείτε όλα τα μηδενοδύναμα
στοιχεία των δακτυλίων $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Άσκηση 2^η Να αποδείξετε ότι το
πρόϊο των μηδενοδύναμων στοιχείων
του R είναι ιδεώδες του R .

Αν $N = \{x \in R \mid x \text{ μηδενοδύναμο}\} \trianglelefteq R$
να αποδείξετε ότι το μοναδικό
μηδενοδύναμο στοιχείο του δακτυλίου R/N
είναι το ουδέτερο στοιχείο αυτού. ($\bar{0} = 0 + N$)

Άσκηση 3^η Να αποδείξετε ότι το
μηδενοδύναμο ιδεώδες $N \trianglelefteq R$
είναι η τομή όλων των πρώτων
ιδεωδών του R .

(Το έχουμε χαρακτηρίσει και
ως $\text{Rad}(R)$)

ΦΥΝΗΑΔΙΟΣ° ως modules

(Δυνάμεια)

Άσκηση 4^η
 Ένα βροχείο ε, ενός διαμετρίου R λέγεται αυτοδύναμο όταν $e^2 = e$

Αν ο R είναι τοπικός διαμετρίος, να αποδείξετε ότι δεν έχει αυτοδύναμο βροχία e, $e \neq 0, 1$.

Άσκηση 5^η Αν $I_1, I_2, \dots, I_n \trianglelefteq R = K[X_1, X_2, \dots, X_m]$

να αποδείξετε ότι
 $W(I_1) \cup W(I_2) \dots \cup W(I_n) = W(I_1 I_2 \dots I_n)$

Άσκηση 6^η Έστω διαμετρίο $R = K[X, Y]$,

Κάποια, ιδιότητες των ιδείδων:
 $I = \langle X, Y \rangle$

είναι τα ιδείδη αυτο

- (i) maximal ιδείδη του R;
- (ii) πρώτο ιδείδη του R;
- (iii) πλήκιο ιδείδη του R;

Παράδοση, 13-11-2023

Ο Διδάσκων

Γιάννης Α. Αντωνιάδης