

Δακτύλιοι και Modules

Χεφερνώ Εξάμηνο 2023

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
4^{ου} ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

Άσκηση 1^η

Απλή εφαρμογή του ότι R Π.Μ.Α.

Άσκηση 2^η

Ανάλογη απόδειξη, όπως κάναμε για την εξίσωση στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[i]$. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ είναι Ευκλείδεια περιοχή.

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση $(x, y) = (\pm 5, 3)$

Άσκηση 3^η

Η απάντηση είναι όχι πάντοτε.

Αντεπαράδειγμα

Έστω φ η εμφύτευση

$$\varphi: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

Προφανώς, είναι ομομορφισμός δακτυλίων. $\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$. Το \mathbb{Z} είναι υποδακτύλιος του \mathbb{Q} , αλλά όχι ιδεώδες του \mathbb{Q} . (\mathbb{Q} σώμα, μοναδικά ιδεώδη $\{0\}$ και \mathbb{Q})
Άσκησης 4 και 5 απλή επαλήθευση.