Μάθημα Δακτύλιοι και Modules
ΑΣΚΗΣΕΙΣ
φυλλάδιο 3°

Άσκηση 1η Αν R δακτύλιος της Noether και $\varphi: R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων, τότε και ο δακτ. $\varphi(R)$ είναι δακτύλιος της Noether.

Απ. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ μία αύξουσα ακολουθία ιδεωδών του $\varphi(R)$. Θεωρούμε την ακολουθία των ιδεωδών του R που είναι αντίστροφες εικόνες των ιδεωδών A_i

$$B_i := \varphi^{-1}(A_i) := \{a \in R \mid \varphi(a) \in A_i\}$$

Αυτά είναι ιδεώδη του R (γιατί;) και ισχύει

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$$

Αυτή είναι μια αύξουσα ακολουθία ιδεωδών του R. Αλλά R δακτ. Noether (εδώ υπενθ. ότι, εξ ορισμού R μεταθετικός). Επομένως η ακολουθία τελικά γίνεται σταθερή (στατική). $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω

$$B_n = B_{n+1} = B_{n+2} = \dots$$

οπότε και

$$\varphi(B_n) = \varphi(B_{n+1}) = \varphi(B_{n+2}) = \dots$$

δηλαδή $A_n = A_{n+1} = A_{n+2} = \dots$, τελικά γίνεται σταθερή.

$\Longrightarrow$ $\varphi(R)$ δακτύλιος της Noether

Άσκηση 2η Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ είναι Π. Α.

Απ Η απεικόνιση

$$\left.\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}[X] &\longrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \\ f(X) &\longmapsto f(\sqrt{-5}) \end{aligned}\right\}$$

είναι επιμορφισμός δακτυλίων (γιατί;)

Επομένως, ο $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ είναι επιμορφική εικόνα του $\mathbb{Z}[X]$.
Ο $\mathbb{Z}$ είναι Π.Κ.Ι $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ περιοχή της Noether και, ως γνωστό, και ο $\mathbb{Z}[X]$ είναι περιοχή της Noether.
Σύμφωνα με την άσκηση 1 και ο $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ είναι περιοχή της Noether

Άρα είναι Π. Α.

Άσκηση 3η Ο $K[X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots]$ δεν είναι περιοχή της Noether, αφού υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες ιδεωδών του R οι οποίες δεν τερματίζουν

π.χ. $\langle X_1 \rangle \subsetneq \langle X_1, X_2 \rangle \subsetneq \langle X_1, X_2, X_3 \rangle \subsetneq \ldots$

__Άσκηση 4__ Ο S είναι υποδακτύλιος
__του $R=\mathbb{Z}[X,Y]$__.

(Αν $A\in S$ και $B\in S$, $A=a+Xf(X,Y)$
και $B=b+Xg(X,Y)$,

τότε $A-B=c+XF(X,Y)\in S$ για $c:=a-b\in\mathbb{Z}$
και $F(X,Y)=f(X,Y)-g(X,Y)$
Επίσης
$A\cdot B=d+X\,G(X,Y)$ με $d=a\cdot b\in\mathbb{Z}$
και $G(X,Y)=ag(X,Y)+bXf(X,Y)$)

Προφανώς ισχύει: $\mathbb{Z}[X]\subset S\subset R=\mathbb{Z}[X,Y]$

Η ακολουθία των ιδεωδών
$\langle X\rangle \subsetneq \langle X,XY\rangle \subsetneq \langle X,XY,XY^2\rangle \subsetneq \dots$
$\subsetneq \langle X,XY,XY^2,\dots,XY^n\rangle \subsetneq \dots$

είναι γνήσια αύξουσα, άρα ο δ. S
__δεν__ είναι Noether.
(__Απόδ__ Αν $\langle X\rangle=\langle X,XY\rangle \Rightarrow XY\in\langle X\rangle$

$\Rightarrow XY=X\cdot$ (στοιχείο του S) $\Rightarrow X(a+Xf(X,Y))=$
$=aX+X^2f(X,Y)$
$\Rightarrow X[Y-a-Xf(X,Y)]=0$, αλλά $\mathbb{Z}[X,Y]$ __ακερ__ περιοχή

$\Rightarrow Y-a-Xf(X,Y)=0$, __αδύνατο__ αφού ο
συντελεστής του Y είναι 1
Επαγωγικά, για __κάθε__ i
$XY^{i+1}\notin\langle X,XY,\dots,XY^i\rangle$ //

Άσκηση 5

Τα σύνολα
$$I_n = \{f(x) \in R \mid f(x) = 0, \forall x > n\}$$
είναι, για κάθε n, ιδεώδη του R (caŭnmen)

Επιπλέον ισχύει
$$I_n \subsetneqq I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Προφανής η σχέση του περιέχεσθαι
($A\nu$ $f(x) \in I_n \Rightarrow f(x) = 0$ για κάθε $x > n$
$\Rightarrow f(x) = 0, \ \forall x > n+1 \Rightarrow f(x) \in I_{n+1}$)

Το I_n περιέχεται γνήσια στο I_{n+1}.
Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής
$\Rightarrow \exists x \in R$ τ.ω. $f(x) \neq 0$ για $n < x \leq n+1$

Άρα ο R δεν είναι δακτύλιος της Noether

Άσκηση 6η

Έστω $x \in R$, $x \neq 0$.

Σχηματίζουμε την φθίνουσα ακολουθία ιδεωδών:
$$\langle x \rangle \supset \langle x^2 \rangle \supset \dots \supset \langle x^n \rangle \supset \langle x^{n+1} \rangle \supseteq \dots$$

Αφού R δ. Artin $\Rightarrow$ γίνεται σταθερή
Άρα $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\langle x^n \rangle = \langle x^{n+1} \rangle$
Το $x^n \in \langle x^{n+1} \rangle \Rightarrow \exists y \in R$ τ.ω $x^n = x^{n+1} \cdot y$
$\Rightarrow x^n (x \cdot y - 1) = 1$. R ακ. περιοχή, $x \neq 0 \Rightarrow x^n \neq 0$
και, επομένως $xy - 1 = 0 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = x^{-1}$

Άσκηση 7

Το ιδεώδες $\langle X, Y\rangle$ δεν είναι κύριο. Αν $\langle X, Y\rangle = \langle f(X,Y)\rangle$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση 8

Κλασσικό παράδειγμα το ιδεώδες $\langle 2, X\rangle$.

(Στις διαλέξεις ο Γιώργος Σφεντουράκης θα μας περιγράψει όλα τα πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{Z}[X]$).

Άσκηση 9

$\mathbb{Z}[i]$ Ευκλ. Περ.

$\Rightarrow \mathbb{Z}[i]$ Π.Κ.Ι.

$\Rightarrow$ (από άσκηση 4 του φυλλαδίου 2) ότι, εκτός το $\langle 0\rangle$, όλα τα άλλα πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{Z}[i]$, τα οποία είναι τα κύρια ιδεώδη του $\mathbb{Z}[i]$ που παράγονται από ανάγωγα $\equiv$ πρώτα στοιχεία είναι maximal.

Το 3 είναι ανάγωγο στοιχείο του $\mathbb{Z}[i]$ (απόδειξη!)

$\Longrightarrow \langle 3\rangle = 3\mathbb{Z}[i]$ είναι maximal

Το $5 = (2+i)(2-i)$, (ανάλυση σε γινόμενο αναγώγων). Άρα το $5\mathbb{Z}[i]$ δεν είναι maximal.

(Το $\langle 5\rangle \subsetneq \langle 2+i\rangle$)

Άσκηση 10

Το $\mathbb{C}$ είναι <u>σώμα</u>. Επομένως ο $R=\mathbb{C}[X]$ είναι Ευκλείδεια περιοχή. Συνεπώς $R=\mathbb{C}[X]$ Π.Κ.Ι

Από, άσκηση 4, του φυλλαδίου 2 όλα τα maximal ιδεώδη ταυτίζονται με τα ιδεώδη που παράγονται από <u>ανάγωγα</u> στοιχεία του $R=\mathbb{C}[X]$.

Τα ανάγωγα στοιχεία, είναι τα <u>ανάγωγα</u> πολυώνυμα. Όμως το $\mathbb{C}$ είναι <u>αλγεβρικώς κλειστό</u>.

Άρα τα ανάγωγα πολυώνυμα είναι <u>ακριβώς</u> τα πολυώνυμα 1ου βαθμού

Επομένως το σύνολο

$$X=\{M \trianglelefteq R \,/\, M \text{ maximal}\}$$
$$=\{\langle X-a\rangle \,/\, a\in\mathbb{C}\}$$

(<u>Παρατήρηση</u>: Ότι τα $\langle X-a\rangle \,|\, a\in\mathbb{C}$ είναι όλα maximal, μπορεί να το δει κανείς και από τον <u>επιμορφισμό</u> δακτυλίων

$$\mathbb{C}[X] \xrightarrow{\varphi_a} \mathbb{C} \quad | \; a\in\mathbb{C}$$
$$f(X) \longmapsto f(a)$$

O $\ker\varphi_a = \langle X-a\rangle$. Επομένως

$$\frac{\mathbb{C}[X]}{\langle X-a\rangle} \cong \mathbb{C} \,(\text{σώμα}) \Rightarrow \langle X-a\rangle$$

maximal