Μάθημα Δακτύλιοι και Modules, 2023 ΧΕΙΜ

Λύσεις ασκήσεων
Φυλλάδιο 2ο

Άσκηση 1η Ο δακτ. $\mathbb{Z}$ είναι Π.Κ.Ι.

Γνωστό: Ο $\mathbb{Z}$ είναι Ευκλείδεια περιοχή, ως προς την συνήθη απόλυτη τιμή. $|\cdot|$

Έστω $A \trianglelefteq \mathbb{Z}$.
Αν $A = \langle 0 \rangle$, τότε είναι κύριο ιδ.

Έστω $A \trianglelefteq \mathbb{Z}$, $A \neq \langle 0 \rangle$. Άρα υπάρχει $\alpha \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $\alpha \neq 0$ και $\alpha \in A$.
Το A ως δακτύλιος, είναι (πρώτα απ' όλα αβελιανή ομάδα).
Συνεπώς, $\alpha \in A \Rightarrow -\alpha \in A$.
Αυτό σημαίνει ότι το A περιέχει φυσικούς αριθμούς (το α ή το $-\alpha$).
Άρα υπάρχει ελάχιστος φυσικός, $m \in A$.
Θα αποδ. ότι $A = \langle m \rangle$.
Αν $\alpha \in A$, έχουμε $\alpha = m \cdot \pi + \vartheta$ (αφού R Ευκλ.Π) και $\vartheta = 0$ ή $0 < \vartheta < m$
$[\alpha \in A$ και $m \in A]$ $\xRightarrow{A \trianglelefteq R}$ $\vartheta = 0$ ή $\vartheta = \alpha - m \cdot \pi \in A$

Το δεύτερο, αποτελεί αντίφαση, αφού $\vartheta \in \mathbb{N}$, $\vartheta < m$ και m ελάχιστος φυσικός που ανήκει στο A. Άρα $\vartheta = 0$
$\Rightarrow \alpha = m \cdot \pi \Rightarrow \alpha \in \langle m \rangle \Rightarrow A \leq \langle m \rangle$
και $\langle m \rangle \leq A$ (αφού $m \in A$) Τελικά $A = \langle m \rangle$.

Άσκηση 2η Στον $R = \mathbb{Z}$.

(i) Θα αποδ. ότι $\langle m \rangle + \langle n \rangle = \langle d \rangle$

όπου $d = \text{Μ.Κ.Δ}(m, n)$

Έστω $a \in \langle m \rangle + \langle n \rangle \Rightarrow a = k \cdot m + \lambda \cdot n \mid k, \lambda \in \mathbb{Z}$

$d = \text{Μ.Κ.Δ}(m, n) \Rightarrow [d \mid m \text{ και } d \mid n] \Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid k \cdot m + \lambda n = a \Rightarrow a \in \langle d \rangle$

Άρα $\langle m \rangle + \langle n \rangle \leq \langle d \rangle$

Αντίστροφα: Το $d = \text{ΜΚΔ}(m, n) \Rightarrow$

$\exists k, \ell \in \mathbb{Z}$ τ.ω $d = k \cdot m + \ell \cdot n \in \langle m \rangle + \langle n \rangle$

$\Rightarrow \langle d \rangle \leq \langle m \rangle + \langle n \rangle$

Τελικά $\langle m \rangle + \langle n \rangle = \langle d \rangle$

Το (ii) δεν έχει νόημα

$\langle m \rangle \cdot \langle n \rangle = \langle m \cdot n \rangle$

Άσκηση 3η R μεταθ. με μοναδιαίο

Αν $A \trianglelefteq R, B \trianglelefteq R$, πρώτα μεταξύ τους, δηλαδή $A+B=R$ να αποδειχθεί ότι

$$A \cdot B = A \cap B$$

Αποδ. Πάντοτε ισχύει $A \cdot B \subseteq A \cap B$ (1)

Τώρα $1 \in R = A+B \Rightarrow \exists\, a \in A$ και $b \in B$

τ.ω. $1 = a+b$.

Αν $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ και $x \in B$

Αλλά $x = x \cdot 1 = x \cdot (a+b) = x \cdot a + x \cdot b$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a \in A \\ x \in B \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot x = x \cdot a \in A \cdot B \\ \left.\begin{array}{l} x \in A \\ b \in B \end{array}\right\} \Rightarrow b \cdot x = x \cdot b \in A \cdot B \end{array}\right\} \xrightarrow[A \cdot B \trianglelefteq R]{} xa + xb \in A \cdot B,$$

δηλαδή $x \in A \cdot B$

Επομένως, $A \cap B \subseteq A \cdot B$ (2)

$\xRightarrow{(1),(2)} A \cdot B = A \cap B$

Άσκηση 4η

R μεταθ. με μοναδιαίο.
Υποθ. ότι κάθε $A \trianglelefteq R$, $A \neq R$ είναι πρώτο
Να αποδ. ότι το R είναι σώμα.

Αποδ. Το $\langle 0 \rangle$ είναι πρώτο.
Άρα ο R είναι ακεραία περιοχή.
Θα αποδ. ότι αν $\alpha \in R \setminus \{0\}$, τότε υπάρχει $b (= \alpha^{-1}) \in R$ τ.ω. $\alpha \cdot b = 1$

Θεωρούμε το ιδεώδες που παράγεται από το στοιχείο α^2, $\langle \alpha^2 \rangle$
Από την υπόθεση το $\langle \alpha^2 \rangle =: P$, είναι πρώτο

Το $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2 \in \langle \alpha^2 \rangle = P$. Το P πρώτο,
άρα $\alpha \in P = \langle \alpha^2 \rangle \Rightarrow \exists\, r \in R$ τ.ω

$$\alpha^2 \cdot r = \alpha \Rightarrow \alpha(\alpha \cdot r - 1) = 0$$

Αλλά R ακερ. περιοχή. Ισχύει ο νόμος της διαγραφής. Επειδή $\alpha \neq 0$, έχουμε

$$\alpha r - 1 = 0 \Rightarrow \alpha \cdot r = 1,$$

δηλαδή (το $r = \alpha^{-1}$), το α αντιστρέψιμο.
$\Rightarrow R$ σώμα

Άσκηση 5η (Κάντε το ενδιάμεσο βήμα και γεωμετρικά)

Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ είναι Ευκλείδεια περιοχή (ως προς την συνήθη νόρμα)

$$N(a+b\sqrt{-2}) = |a+b\sqrt{-2}|^2 = a^2+2b^2$$

Η πρώτη ιδιότητα:

Αν $x = a_1 + b_1\sqrt{-2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ και
$y = a_2 + b_2\sqrt{-2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

τ.ω. $y \mid x \Rightarrow \exists\, z = a_3 + b_3\sqrt{-2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $(z \neq 0)$

και $x = y\cdot z \Rightarrow N(x) = N(y)\cdot N(z)$

$\Rightarrow a_1^2 + 2b_1^2 = (a_2^2 + 2b_2^2)(a_3^2 + 2b_3^2)$

$\Rightarrow (a_2 + 2b_2^2) < (a_1^2 + 2b_1^2) \Rightarrow N(y) < N(x)$.

Η δεύτερη ιδιότητα:

Έστω $x = a_1 + b_1\sqrt{-2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ και
$y = a_2 + b_2\sqrt{-2}$

Το $\frac{x}{y} = \frac{x\cdot\bar{y}}{y\cdot\bar{y}} = a + b\sqrt{-2}$ με $a, b \in \mathbb{Q}$

Υπάρχουν $m, n \in \mathbb{Z}$ τω $|a-m| \leq \frac{1}{2}$

και $|b-n| \leq \frac{1}{2}$. Η $N\left(\frac{x}{y} - (m+n\sqrt{-2})\right)$

$= N[(a-m) + (b-n)\sqrt{-2}]$

$= (a-m)^2 + 2(b-n)^2 \leq \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$

Έστω $\pi := m + n\sqrt{-2}$, και $\vartheta := x - y\cdot\pi$

έχουμε $\vartheta = 0$ ή $N(\vartheta) = N\left[y\left(\frac{x}{y}\right) - \pi\right] =$

$= N(y)\cdot N\left(\frac{x}{y} - \pi\right) < N(y)$

Άσκηση 6η Αν $d \leq 2$, d square-free να αποδείξετε ότι $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^{*} = \{\pm 1\}$

Απ $\varepsilon = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^{*}$

$\Longleftrightarrow N(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \varepsilon' = \pm 1$

$\Longleftrightarrow a^2 + b^2|d| = \pm 1 \Longleftrightarrow [a = \pm 1 \text{ και } b = 0]$

$\Longleftrightarrow \varepsilon = \pm 1$

Άσκηση 7η Αν $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $(d \neq 0, 1)$ και d square free και υποθ. ότι ο R είναι Π.Μ.Α. να αποδειχθεί ότι το 2 δεν είναι ανάγωγο στον R.

Αποδ Σε Π.Μ.Α πρώτο στοιχείο ≡ ανάγωγο.

Αρκεί να αποδείξω ότι το 2 δεν είναι πρώτο.

Αν ήταν, από τη σχέση $2 \mid d(d-1)$ (πάντοτε το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων, διαιρείται με 2)

Από $2 \mid d(d-1) = (d+\sqrt{d})(d-\sqrt{d})$

όπου $d+\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ και $d-\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

θα είχαμε $2 \mid d+\sqrt{d}$ είτε $2 \mid d-\sqrt{d}$.

Αλλά αυτό είναι αδύνατο, αφού αν $d+\sqrt{d} = 2(\kappa+\lambda\sqrt{d})$ είτε

$d-\sqrt{d} = 2(\mu+\nu\sqrt{d})$

θα είχαμε $2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda \notin \mathbb{Z}$, άτοπο

και $2\nu = -1 \Rightarrow \nu \notin \mathbb{Z}$, άτοπο

Άσκηση 8η

Αν $d<-2$, square-free, να αποδείξετε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ δεν είναι Π.Μ.Α.

Απ. Το 2 είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

αφού, αν $2=(a+b\sqrt{d})(c+e\sqrt{d})$

$\Rightarrow N(2)=N(a+b\sqrt{d})\cdot N(c+e\sqrt{d})$

$\Rightarrow 4=(a^2+b^2|d|)(c^2+e^2|d|)$

$\Rightarrow a^2+b^2|d|$ μονάδα ή $c^2+e^2|d|$ μονάδα αφού η ισότητα για $a^2+b^2|d|$ είναι αδύνατη

Δεν είναι πρώτο, δες άσκηση 7, $\Rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ όχι Π.Μ.Α

Άσκηση 9η

Το $4=2\cdot 2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$

Άσκηση 10η

$6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$

και η διαδικασία της απόδειξης είναι σε όλους γνωστή.