

BIO-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Παραδώστε τις ασκήσεις 2.1.1, 2.2.2, 2.3.4, 2.4.2, 2.7, 2.10

Άσκηση 2.1 Λύστε τα παρακάτω ομογενή συστήματα και δώστε την λύση σε διανυσματική μορφή (γενική παραμετρική λύση).

$$1. \begin{cases} -x_1 & + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + & + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + 2y + 5z + 3w = 0 \\ 6x + y + 5z + 4w = 0 \\ 4x - y + w = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 2.2 Λύστε τα παρακάτω συστήματα:

$$1. \begin{cases} x + & + 2z = 3 \\ 2x + 2y + 3z = 9 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 2y + 5z + 3w = 1 \\ 6x + y + 5z + 4w = -1 \\ 4x - y + w = 3 \\ 5y + 9z + w = 2 \end{cases}$$

Άσκηση 2.3 Να λυθούν τα μη-ομογενή γραμμικά συστήματα με τους ακόλουθους επαυξημένους πίνακες:

$$1. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$2. (1 \ 0 \ 3 \ 5 \ | \ 9)$$

$$3. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$4. \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

Μπορείτε να δώσετε την γενική διανυσματική λύση των αντίστοιχων ομογενών χωρίς να λύσετε ξανά τα συστήματα;

Άσκηση 2.4 Βρείτε για ποιές τιμές των παραμέτρων $a, b \in \mathbb{R}$, καθένα από τα παρακάτω συστήματα: (i) δεν έχει λύση, (ii) έχει άπειρες λύσεις, (iii) έχει μοναδική λύση. Λύστε το σύστημα στις δύο τελευταίες περιπτώσεις.

$$1. \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ ax + z = b \\ x + y + 2z = 3 \end{array} \right\}$$

$$2. \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = a \\ x - y = 0 \\ 3x + y + bz = 0 \end{array} \right\}$$

Άσκηση 2.5 Βρείτε ποιά σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει λύση.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - z = a \\ -x + y = b \\ -2x + y + z = c \end{array} \right\}$$

Άσκηση 2.6 Εξετάστε για ποιές τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ το παρακάτω σύστημα έχει λύση. Για τις τιμές αυτές λύστε το σύστημα.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 5x + 6y - \lambda z = 1 \\ x + 2y + \lambda z = \lambda \end{array} \right\}$$

Άσκηση 2.7 Βρείτε γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων

$$(3, -1, 2), (1, -1, 4), (2, 0, -1)$$

ώστε

1. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2,
2. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη -2 ,
3. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη 2,

Είναι αυτά τα αποτελέσματα μοναδικά;

Άσκηση 2.8 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς. Όλες οι προτάσεις αναφέρονται σε ένα σύστημα $Ax = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

1. Εάν $m > n$ και $b \neq 0$, το σύστημα είναι αδύνατο.
2. Εάν $m < n$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

3. Εάν $m < n$ και $b = 0$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
4. Εάν το σύστημα $Ax = 0$ έχει άπειρες λύσεις, τότε και το σύστημα $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις.
5. Εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις, τότε και το $Ax = 0$ έχει άπειρες λύσεις.
6. Εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση, τότε και το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση.
7. Εάν το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση, τότε και το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση.

Άσκηση 2.9 Εξετάστε αν οι παρακάτω πίνακες έχουν αντίστροφο και αν ναι υπολογίστε τον.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2.10 Αν A ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ της προηγούμενης άσκησης, λύστε το σύστημα $Ax = b$

όπου $b = (1, 2, 3, 4)$ κάνοντας χρήση του αντιστρόφου A^{-1} που βρήκατε στην προηγούμενη άσκηση.

Άσκηση 2.11 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Υπολογίστε πίνακα μετάθεσης P , κάτω

τριγωνικό πίνακα L και κλιμακωτό πίνακα U , τέτοιους ώστε $PA = LU$.