

9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Δείξτε ότι $\cos \pi/7 + \cos(3\pi/7) + \cos(5\pi/7) = 1/2$. Υπόδειξη: υπολογίστε το $\Phi_{14}(x)$.

2. Να υλοποιηθεί η αντιστοιχία Galois για την επέκταση

$$\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\omega_{12}), \text{ όπου } \omega_{12} = \text{ μια πρωταρχική 12η ρίζα τής μονάδας.}$$

3. Δείξτε ότι αν τό κανονικό n -γώνο κατασκευάζεται τότε και τό κανονικό πολύγωνο με $2^s n$ πλευρές κατασκευάζεται. Δείξτε το με δύο τρόπους: 1) με χρήση τού θεωρήματος που αναφέρει ποιά ακριβώς είναι τα κατασκευάσιμα πολύγωνα και 2) με στοιχειώδη τρόπο χωρίς αναφορά στο παραπάνω θεώρημα.

4. Ποιές από τίς παρακάτω γωνίες είναι κατασκευάσιμες και ποιές όχι (με δικαιολόγηση). Αν είναι κατασκευάσιμες τότε κατασκευάστε τίς!

(α) 30° .

(β) 10° .

(γ) 36° .

5. Έστω $(m, n) = 1$ και $\omega_n \in U(n)$, $\omega_m \in U(m)$, $\omega_{mn} \in U(mn)$.

(α) Δείξτε ότι $\mathbb{Q}(\omega_n) \cap \mathbb{Q}(\omega_m) = \mathbb{Q}$.

(β) Δείξτε ότι $\mathbb{Q}(\omega_n, \omega_m) = \mathbb{Q}(\omega_{mn})$