

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Έστω $K \leq M \leq E$ επεκτάσεις σωμάτων με $K \leq E$ διαχωρίσιμη. Δείξτε ότι οι επεκτάσεις $K \leq M$ και $M \leq E$ είναι διαχωρίσιμες.
2. Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $a^4 = 5$. Δείξτε ότι:
 - (α) Τό $\mathbb{Q}(ia^2)$ είναι κανονική επέκταση τού \mathbb{Q} .
 - (β) Τό $\mathbb{Q}(a + ia)$ είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}(ia^2)$.
 - (γ) Τό $\mathbb{Q}(a + ia)$ δεν είναι κανονική επέκταση τού \mathbb{Q} .
3. Έστω $K \leq F$ επέκταση σωμάτων με $[F : K] = 2$. Δείξτε ότι η επέκταση είναι κανονική.
4. Έστω E το σώμα ανάλυσης τού πολυωνύμου $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
 - (α) Δείξτε ότι $[E : \mathbb{Q}] = 6$.
 - (β) Βρείτε την ομάδα Galois $G = \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$, δηλ. βρείτε όλα τα στοιχεία της $\sigma : E \rightarrow E$, \mathbb{Q} -αυτομορφισμός.
 - (γ) Βρείτε όλες τις υποομάδες H τής G (Υπόδειξη: ποια είναι η τάξη τους;).
 - (δ) Υλοποιήστε την αντιστοιχία Galois, δηλ. για κάθε $H \leq G$ βρείτε τό ενδιάμεσο σώμα E^H . (Υπόδειξη: $\mathbb{Q} \leq F$ επέκταση σωμάτων με $[F : \mathbb{Q}] = p$ πρώτος, τότε $F = \mathbb{Q}(a)$, για κάποιο $a \in F$).