Εαρινο εξαμηνο 2022-23 - Θεωρια Σωματων

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Έστω p πρώτος αριθμός. Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης E τού πολυωνύμου $x^p - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ και δείξτε ότι $[E : \mathbb{Q}] = p(p-1)$.

2. Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης E τού πολυωνύμου $x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ και τον βαθμό επέκτασης $[E : \mathbb{Q}]$.

3. Έστω $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

   (α΄) Βρείτε την ομάδα $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

   (β΄) Επιλέξτε ένα στοιχείο $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ με την ιδιότητα $\sigma(i) = -i$ και έστω $H =< \sigma >$ (η κυκλική υποομάδα τής $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ που παράγεται από το σ). Βρείτε το σώμα E^H.

4. Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο και E τό σώμα ανάλυσής του στο $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι το $f(x)$ έχει μία ρίζα στο $\mathbb{C}$ που δεν είναι στο $\mathbb{R}$. Έστω $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\sigma(z) = \bar{z}$ (συζυγία μιγαδικών αριθμών). Δείξτε ότι η σ επάγει ένα στοιχείο τής $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ (δηλ. ο περιορισμός τής σ στο E ορίζει ένα στοιχείο τής $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$).

5. Έστω F σώμα χαρακτηριστικής p πρώτος και $f(x) \in F[x]$ ένα ανάγωγο πολυώνυμο. Δείξτε ότι τό $f(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(x) = g(x^{p^m})$, όπου $g(x) \in F[x]$ ανάγωγο διαχωρίσιμο πολυώνυμο. Δείξτε, επομένως, ότι κάθε ρίζα τού $f(x)$ έχει πολλαπλότητα p^m.