Εαρινο εξαμηνο 2022-23 - Θεωρια Σωματων

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Βρείτε σώματα ανάλυσης E των παρακάτω πολυωνύμων $f(x) \in F[x]$ και υπολογίστε τον αντίστοιχο βαθμό επέκτασης $[E : F]$.
   (α') $f(x) = x^3 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (β') $f(x) = x^6 - 8 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (γ') $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

2. Έστω E σώμα ανάλυσης τού πολυωνύμου $x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Βρείτε τον βαθμό τής επέκταση $\mathbb{Z}_3 \leq E$.

3. Δείξτε ότι αν $F \leq E$ επέκταση σωμάτων, τότε $\mathrm{char}F = \mathrm{char}E$.

4. Βρείτε όλες τίς $\mathbb{Q}$-εμβυθίσεις σωμάτων $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \hookrightarrow \mathbb{C}$.

5. (α') Βρείτε όλες τίς $\mathbb{Q}$-εμβυθίσεις σωμάτων $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \hookrightarrow \mathbb{R}$.
   (β') Βρείτε όλες τίς $\mathbb{Q}$-εμβυθίσεις σωμάτων $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \hookrightarrow \mathbb{C}$.

6. Βρείτε όλες τίς $\mathbb{Q}$-εμβυθίσεις σωμάτων $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) \hookrightarrow \mathbb{R}$.

7. Βρείτε την ομάδα Galois $G(E/F) = \{\sigma : E \to E, \;\; F-\text{αυτομορφισμός}\}$ όταν οι επεκτάση $F \leq E$ είναι η:
   (α') $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(2 + 3i)$.
   (β') $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$.
   (γ') $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(a)$, όπου a ρίζα τού $x^2 + x + 2$.

8. Υπάρχει $\mathbb{Q}$-ισομορφισμός σωμάτων $E \to L$ όταν
   (α') $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ και $L = \mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$.
   (β') $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ και $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$.
   (γ') $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ και $L = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$.
   (δ') $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}})$ και $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{1 - \sqrt{3}})$.

9. Έστω F σώμα με $\mathrm{char}F = p$ πρώτος αριθμός και $F \leq E$ επέκταση σωμάτων βαθμού $[E : F] = n$ με $(n, p) = 1$. Δείξτε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $p_a(x) \in F[x]$ κάθε στοιχείου $a \in E$ είναι διαχωρίσιμο.