4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Βρείτε τούς βαθμούς των επεκτάσεων
   (αʹ) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}})$.
   (βʹ) $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

2. Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $a \neq \pm b$ και $a^2, b^2 \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $\mathbb{Q}(a, b) = \mathbb{Q}(a + b)$.

3. Έστω a αλγεβρικό $/F$. Δείξτε ότι αν $[F(a) : F] =$περιττός, τότε $[F(a) : F] = [F(a^2) : F]$. Ισχύει το ίδιο αν ο βαθμός είναι άρτιος;

4. Αν $F \leq R \leq L$ με $F \leq L$ αλγεβρική επέκταση σωμάτων και R δακτύλιος, δείξτε ότι R είναι σώμα.

5. Έστω $f(x) \in K[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο βαθμού n και έστω $K \leq F$ επέκταση σωμάτων βαθμού m με $(n, m) = 1$.
   (αʹ) Πάρτε a ρίζα τού $f(x)$ (σε ένα σώμα ανάλυσης τού $f(x)$) και θεωρείστε την επέκταση $F(a)$. Δείξτε ότι $K(a) \leq F(a)$.
   (βʹ) Έστω $n' = [F(a) : K(a)]$ και $m' = [F(a) : F]$. Δείξτε ότι $nn' = mm'$. Συμπεράνατε ότι $n \mid m'$.
   (γʹ) Δείξτε ότι $m' \leq n$. Συμπεράνατε ότι $m' = n$ και $n' = m$.
   (δʹ) Δείτε ότι το πολυώνυμο $f(x)$ ως πολυώνυμο τού $F[x]$ παραμένει ανάγωγο.
   (εʹ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^5 - 9x^3 + 15x + 6$ είναι ανάγωγο ως πολυώνυμου τού $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})[x]$.

6. Έστω a, b αλγεβρικά $/F$ με $[F(a) : F] = n,\ [F(b) : F] = m,\ \ (n, m) = 1$.
   (αʹ) Βρείτε τον βαθμό τής επέκτασης $F \leq F(a, b)$. *Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε την παραπάνω άσκηση.
   (βʹ) Δείξτε ότι $F(a) \cap F(b) = F$ (η τομή ως υποσύνολα τού $F(a, b)$).

7. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε ως $2^{1/n}$ την μοναδική πραγματική θετική ρίζα τής εξίσωσης $x^n - 2 = 0$ και έστω $A_n = \mathbb{Q}(2^{1/n})$.
   (αʹ) Υπολογίστε τον βαθμό τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq A_n$.
   (βʹ) Αν $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \mid n$ δείξτε ότι $A_m \leq A_n$ και υπολογίστε τον βαθμό $[A_n : A_m]$.
   (γʹ) Αν $(m, n) = 1$ δείξτε ότι $A_{mn} = \mathbb{Q}(2^{1/m}, 2^{1/n})$.