

## 3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Βρείτε σώματα ανάλυσης  $E$  των παρακάτω πολυωνύμων  $f(x) \in F[x]$  και υπολογίστε τον αντίστοιχο βαθμό επέκτασης  $[E : F]$ .
  - (α)  $f(x) = x^4 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ .
  - (β)  $f(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ .
  - (γ)  $f(x) = x^n - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $n \geq 3$ .
  - (δ)  $f(x) = x^2 + x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ .
  
2. Έστω  $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ . Έστω  $E \subseteq \mathbb{C}$  σώμα ανάλυσής του και έστω  $\xi \in E$  μια ρίζα τού  $f(x)$ .
  - (α) Δείξτε ότι και το  $\xi^2 - 2 \in E$  είναι, επίσης, ρίζα τού  $f(x)$ .
  - (β) Βρείτε ποιά είναι η τρίτη ρίζα τού  $f(x)$ , ως έκφραση τής  $\xi$ .
  - (γ) Βρείτε τον βαθμό τής επέκτασης  $[E : \mathbb{Q}]$ .
  
3. Έστω  $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$  και έστω  $E \subseteq \mathbb{C}$  σώμα ανάλυσής του.
  - (α) Δείξτε ότι τó  $f(x)$  είναι ανάγωγο και ότι έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα  $\xi$ .
  - (β) Έστω  $\rho$  μια μιγαδική ρίζα τού  $f(x)$ . Δείξτε ότι  $[\mathbb{Q}(\xi, \rho) : \mathbb{Q}] = 6$ .
  - (γ) Δείξτε ότι  $E = \mathbb{Q}(\xi, \rho)$ .
  
4. Έστω  $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ .
  - (α) Δείξτε ότι τó  $f(x)$  είναι ανάγωγο.
  - (β) Έστω  $\xi$  μια ρίζα τού  $f(x)$  σε μια επέκταση τού  $\mathbb{Z}_5$ . Δείξτε ότι τó  $E = \mathbb{Z}_5(\xi)$  είναι ένα σώμα ανάλυσης τού  $f(x)$ .
  - (γ) Δείξτε ότι τó  $E$  έχει 25 στοιχεία και γράψτε τα ως πολυωνυμικές εκφράσεις τού  $\xi$  με συντελεστές στο  $\mathbb{Z}_5$ .