2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Λύσετε ξανά την άσκηση 7β) του Φυλλαδίου # 1, χρησιμοποιώντας μια βάση τού $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{Q}(a)$.
2. Βρείτε το βαθμό τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{3}})$.
3. Έστω $F \leq L$ μια επέκταση σωμάτων με βαθμό $[L:F]=p$ πρώτο αριθμό.
   (α΄) Δείξτε ότι αν E σώμα με $F \leq E \leq L$ τότε $E=F$ ή $E=L$.
   (β΄) Δείξτε ότι $L=F(a)$ για κάποιο $a \in L$.
4. (α΄) Βείτε τον βαθμό τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
   (β΄) Βείτε τον βαθμό τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   (γ΄) Έστω $K=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Βείτε τον βαθμό τής επέκτασης $K \leq K(\sqrt{2})$.
   (δ΄) Θεωρώντας τις διαδοχικές επεκτάσεις $\mathbb{Q} \leq K \leq K(\sqrt{2})$ βρείτε τον βαθμό τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{2})$.
   (ε΄) Δείξτε ότι $\sqrt{2}-\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. *Υπόδειξη:* $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})=...$
   (ϛ΄) Δείξτε οτι $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$.
   (ζ΄) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο τού $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ πανω από το $\mathbb{Q}$.
5. (α΄) Βρείτε το βαθμό τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$. *Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8β) τού Φυλλαδίου # 1.
   (β΄) Θέτουμε $a=\mathrm{Re}(e^{2\pi i/p}) \in \mathbb{R}$. Για $p=$ περιττό πρώτο, δείξτε ότι $a \in \mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$ και, επίσης ότι $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p}):\mathbb{Q}(a)]=2$.
   (γ΄) Δείξτε ότι $[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}]=\frac{p-1}{2}$.