Χειμερινό εξάμηνο 2022-23 - Άλγεβρα Ι

11ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Στην ομάδα $\mathbb{S}_4$, θεωρούμε το υποσύνολο $H = \{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$.

   (α΄) Δείξτε ότι η H είναι υποομάδα τής $\mathbb{S}_4$ και μάλιστα αβελιανή.

   (β΄) Γράψτε τα αριστερά σύμπλοκα τής H στην $\mathbb{S}_4$.

2. Στην ομάδα $\mathbb{S}_4$ βρείτε την κυκλική υποομάδα $H = \langle(1324)\rangle$ και τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα τής H στην $\mathbb{S}_4$

3. Στην ομάδα $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ βρείτε την κυκλική υποομάδα $H = \langle[6]\rangle$ και τα αριστερά (που συμπίπτουν με τα δεξιά) σύμπλοκα τής H στην $\mathbb{Z}_{18}$.

4. Έστω $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ η ομάδα των αντιστρέψιμων 3×3 πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$ και έστω

$$H = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},\ a, b, c \neq 0\}$$

   η υποομάδα των διαγωνίων αντιστρέψιμων πινάκων. Βρείτε το αριστερό σύμπλοκο τής H στην $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ στο οποίο ανήκει ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Έστω ομάδα G, τής οποίας η τάξη είναι pq, όπου p, q πρώτοι αριθμοί. Δείξτε ότι κάθε υποομάδα H τής G, με $H \neq G$, είναι κυκλική.

6. Έστω H_1, H_2 υποομάδες ομάδας G με $(|H_1|, |H_2|) = 1$. Δείξτε ότι $H_1 \cap H_2 = \{e\}$. .

7. Αποδείξτε ότι, αν μία ομάδα G έχει δύο, τουλάχιστον, στοιχεία και οι μόνες υποομάδες της είναι η G και η $\{e\}$, τότε η ομάδα είναι πεπερασμένη και η τάξη της είναι πρώτος αριθμός (*Υπόδειξη:* πάρτε ένα στοιχείο $a \neq e$ τής ομάδας και εξετάστε την κυκλική υποομάδα $< a >$).

8. Έστω G ομάδα και H υποομάδα τής G με $|G : H| = 2$. Να αποδειχθεί ότι $a^2 \in H$, γιά κάθε $a \in G$.

9. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, εξετάστε άν η απεικόνιση, που δίνεται, είναι ομομορφισμός. Στην περίπτωση που είναι ομομορφισμός βρείτε τον πυρήνα του και την εικόνα του.

   (α΄) Ομάδες $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ και $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(n) = -2n$.

   (β΄) Ομάδες $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +)$ και $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = [x]$, όπου $[x]$ =το ακέ'ραιο μέρος τού αριθμού x .

   (γ΄) Ομάδα $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $\phi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τή σχέση $\phi(x) = |x|$.

   (δ΄) Ομάδα $(G, \star)$ και $\phi : G \longrightarrow G$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(g) = g^{-1}$.

   (ε΄) Ομάδες $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = e^x$.

   (ϛ΄) Ομάδες $(\mathbb{Z}_6, +), (\mathbb{Z}_2, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi([a]_6) = [a]_2$.

   (ζ΄) Ομάδες $(\mathbb{Z}_9, +), (\mathbb{Z}_2, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_9 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi([a]_9) = [a]_2$.

   (η΄) Ομάδες $(\mathbb{Z}_{20}, +), (\mathbb{Z}_{12}, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_{20} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi([a]_{20}) = 3[a]_{12}$.

(θ΄) Ομάδες $(F,+),(\mathbb{R},+)$, όπου F το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και $\phi : F \longrightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(f) = \displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

10. Έστω $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ ομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι:

(α΄) $\forall a \in G_1$ έχομε $\mathrm{ord}(\phi(a)) \mid \mathrm{ord}(a)$.

(β΄) Αν, επιπλέον ο ϕ είναι ισομορφισμός, τότε δείξτε ότι $\mathrm{ord}(\phi(a)) = \mathrm{ord}(a)$.