ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης - Μιχάλης Ταρουδάκης

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 10

Άσκηση 10.1 Έστω A ένας 3×3 πίνακας με $\det(A) = -1$. Υπολογίστε την ορίζουσα καθενός από τους παρακάτω πίνακες: $\frac{1}{2}A, A^3, AA^t, A^{-1}$.

Άσκηση 10.2 Έστω $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, με $\det(A) = D$. Υπολογίστε τις $\det(2A), \det(A^2), \det(-A), \det(A^t)$.

Άσκηση 10.3 Υπολογίστε την ορίζουσες των παρακάτω πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 100 & 200 & 300 \\ 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t^2 \\ t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 10.4 Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

εφαρμόστε πρώτα κάποια βήματα από την απαλοιφή Gauss για να υπολογίσετε την ορίζουσα $\det(A)$ πιο εύκολα. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος υπολογίστε και την $\det(A^{-1})$.

Άσκηση 10.5 Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -3 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει το ομογενές σύστημα $AX = 0$ μοναδική λύση; Για κάποια από τις τιμές του λ που βρήκατε για τις οποίες το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση δώστε σε διανυσματική μορφή το σύνολο των λύσεων του ομογενούς $AX = 0$.

Άσκηση 10.6

1) Δείξτε, με χρήση οριζουσών, ότι δεν υπάρχει πραγματικός 2 επί 2 πίνακας B τέτοιος ώστε $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Δείξτε ότι αν $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ με n περιττός και $A^t = -A$ τότε $\det(A) = 0$.

Άσκηση 10.7 Ορίζουμε τον συζυγή του πίνακα A, $\mathrm{adj}\, A$ ως εξής :

$$\mathrm{adj}\, A = (c_{ij})^t, \quad \text{όπου} \quad c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Βρείτε τον $\mathrm{adj} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 10.8 Τώρα που έχουμε μιλήσει για ορίζουσες μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε το εξής: αν $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ για τον οποίο υπάρχει B με $AB = I_n$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος. Βλέπετε την απόδειξη;

Άσκηση 10.9 Ορίζουμε την ακολουθία αριθμών F_n, $n \geq 1$,

$$F_n = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι πίνακες που εμφανίζονται στην ακολουθία έχουν την εξής ιδιότητα: τα στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα με 1, τα στοιχεία "ακριβώς πάνω" από τα στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα με -1, τα στοιχεία "ακριβώς κάτω" από τα στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα με 1. Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία είναι ίσα με 0.

a. Γράψτε τους πίνακες που σχετίζονται με τα F_1, F_2, F_3 και υπολογίστε τις ορίζουσες (δηλαδή υπολογίστε τα F_1, F_2, F_3).

b. Δείξτε ότι $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ για κάθε $n \geq 3$.

Άσκηση 10.10 Αν τα στοιχεία του τετραγωνικού πίνακα A είναι ακέραιοι και $\det(A) = \pm 1$ δείξτε ότι και τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραιοι.