

10ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Στην ομάδα \mathbb{S}_8 γράψτε τη μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ ως γινόμενο ξένων κύκλικών μεταθέσεων (κύκλων) και βρείτε την τάξη της.

2. Έστω $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Βρείτε την κυκλική υποομάδα $\langle \sigma \rangle$ της \mathbb{S}_5 που παράγεται από την σ .

3. Δείξτε ότι μια κυκλική μετάθεση (κύκλος) μήκους r έχει πρόσημο $(-1)^{r-1}$.

4. Στην ομάδα \mathbb{S}_6 εκφράστε κάθε μία από τις παρακάτω μεταθέσεις ως γινόμενο ξένων κύκλων και βρείτε την τάξη τους και το πρόσημό τους.

(α) $(13)(23)$.

(β) $(16)(26)(36)(46)(56)$.

(γ) $(12345)(16)$.

5. Εξετάστε αν η παρακάτω μετάθεση σ είναι άρτια ή περιττή:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & 9 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

6. (α) Βρείτε μια μετάθεση τάξης 99 στην \mathbb{S}_{21} .

(β) Πόσες μεταθέσεις τάξης 2 έχει η \mathbb{S}_4 ;

7. Θεωρούμε την ομάδα \mathbb{S}_n .

(α) Έστω $s \leq n$. Βρείτε το αντίστροφο του στοιχείου $(12 \dots s)$.

(β) Έστω $\tau = (1234)$. Βρείτε την τάξη του στοιχείου τ . Εκφράστε τα τ^2, τ^3 ως γινόμενα ξένων κύκλων.

(γ) Αν τ όπως στο παραπάνω ερώτημα, βρείτε την τάξη του στοιχείου τ^{347} .

(δ) Ποιά είναι η τάξη του στοιχείου $\gamma = (12345)(567)$. Βρείτε τη μετάθεση γ^{-581} .

8. Δείξτε ότι ένα στοιχείο τάξης 14 στην \mathbb{S}_{10} είναι περιττή μετάθεση.

9. Έστω $\sigma \in \mathbb{S}_n$ μια κυκλική μετάθεση (κύκλος) μήκους r . Δείξτε ότι

(α) Αν το r είναι περιττό τότε η σ^2 είναι κυκλική μετάθεση (κύκλος).

(β) Αν το r είναι άρτιο τότε η σ^2 είναι γινόμενο δύο ξένων κυκλικών μεταθέσεων (κύκλων).

10. Έστω H υποομάδα της \mathbb{S}_n , $n \geq 2$. Δείξτε ότι ή όλες οι μεταθέσεις της H είναι άρτιες ή ότι ακριβώς οι μισές από αυτές είναι άρτιες (και οι άλλες μισές περιττές).