Χειμερινό εξάμηνο 2022-23 - Άλγεβρα Ι

9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Εξετάσατε ποιές από τις παρακάτω ομάδες είναι κυκλικές.
   (α') $(\{+1,-1\},\cdot)$.
   (β') U_n, όπως στην άσκηση 2 τού Φυλλαδίου 8.
   (γ') $(\mathbb{R},+)$.

2. Έστω $F=\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ συνάρτηση$\}$ και $F^\star=\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ συνάρτηση$\}$. Στό F ορίζομε πράξη την πράξη $+$ και στο $F^\star$ την πράξη $\cdot$ όπως στο πρόβλημα 2 τού φυλλαδίου 3. Δείξτε ότι $(F,+)$ και $(F^\star,\cdot)$ είναι ομάδες. Εν συνεχεία, θεωρήστε τα εξής σύνολα:
   (α') $A=\{f\in F\,:\,f(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\}$.
   (β') $B=\{f\in F\,:\,f(1)=0\}$.
   (γ') $C=\{f\in F\,:\,f(0)=1\}$.
   (δ') $D=$ το σύνολο των σταθερών μη μηδενικών συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

   Ποιά από τα παραπάνω είναι υποομάδες τής $(F,+)$ και ποιά τής $(F^\star,\cdot)$.

3. (α') Εστω $(G,\star)$ ομάδα και K,L υποομάδες τής G. Δείξτε ότι $K\cap L$ είναι υποομάδα τής G.
   (β') Έστω $(G,\star)$ ομάδα και έστω a στοιχείο τής G. Δείξτε ότι το $H_a:=\{g\in G,\ \text{όπου}\ a\star g=g\star a\}$ είναι υποομάδα τής G.

4. Έστω $(G,\star)$ μια αβελιανή ομάδα και έστω m ένας ακέραιος αριθμός. Δείξτε ότι το $G_m:=\{g\in G,\ \text{με}\ g^m=e\}$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο, είναι υποομάδα τής G.

5. (α') Έστω $(G,\star)$ αβελιανή ομάδα και A,B υποομάδες τής G. Δείξτε ότι το $A\star B=\{a\star b,\ a\in A,\ b\in B\}$ είναι υποομάδα τής G.
   (β') Εστω $n,m\in\mathbb{Z}$. Δείξτε ότι το $n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}=\{a+b,\ a\in n\mathbb{Z},\ b\in m\mathbb{Z}\}$ είναι κυκλική υποομάδα τής ομάδας $(\mathbb{Z},+)$.

6. (α') Βρείτε την τάξη όλων των στοιχείων τής ομάδας $(\mathbb{Z}_8,+)$.
   (β') Ποιά η τάξη τής υποομάδας τής $(\mathbb{Z}_{30},+)$ που έχει ως γεννήτορα το $[25]$; Βρείτε όλα τα στοιχεία τής παραπάνω υποομάδας.
   (γ') Ποιά η τάξη τής υποομάδας τής $(\mathbb{Z}_{42},+)$ που έχει ως γεννήτορα το $[30]$; Βρείτε όλα τα στοιχεία τής παραπάνω υποομάδας.
   (δ') Ποιά στοιχεία τής ομάδας $(\mathbb{Z}_{42},+)$ έχουν τάξη 6;

7. Βρείτε το πλήθος των στοιχείων τού συνόλου $\{\sigma\in S_5\ \text{με}\ \sigma(3)=4\}$.

8. Στην ομάδα $\mathbb{S}_8$ (η ομάδα μεταθέσεων τών 8 στοιχείων) θεωρούμε τις μεταθέσεις

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&1&7&8&5&6\end{pmatrix}\ \text{και}\ \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&8&6&1&7&3&2&4\end{pmatrix}$$

   (α') Βρείτε τις μεταθέσεις $\sigma\,\tau$ και $\tau\,\sigma$.
   (β') Βρείτε τις μεταθέσεις σ^{-1} και τ^{-1}

9. Στην ομάδα $\mathbb{S}_8$ (η ομάδα μεταθέσεων τών 8 στοιχείων) θεωρούμε την μετάθεση $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&1&7&8&5&6\end{pmatrix}$.
   (α') Βρείτε την αντίστροφη μετάθεση σ^{-1}.
   (β') Βρείτε την τάξη $\operatorname{ord}(\sigma)$ τής σ.
   (γ') Υπολογίστε την μετάθεση σ^{154} και σ^{-154}.