ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-23
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης, Μιχάλης Ταρουδάκης

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 8

Άσκηση 8.1 Βρείτε τον πίνακα, ως προς την κανονική βάση, που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις παρακάτω γραμμικές απεικονίσεις. Επίσης, εξετάστε ποιές από αυτές είναι ένα-προς-ένα και ποιές είναι επί.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \ f(x, y) = (3x + y, 2y, x - y)$,

(ii) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \ g(x, y, z) = (3x + y, x - y + z)$,

(iii) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \ h(x, y, z) = (3x + y, x - y + z, y + z)$.

Άσκηση 8.2 Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y, z) = (x - y, -x + 2y + z)$.

(i) Βρείτε τον πίνακα $[L]$ της L.

(ii) Υπολογίστε τη διάσταση του πυρήνα και της εικόνας της L.

Άσκηση 8.3 Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$f(1, 1, 2) = (1, 0, 2), f(0, -1, 1) = (1, 1, 1), f(1, 0, 2) = (3, 2, 4).$$

(i) Βρείτε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης, $[f]$.

(ii) Δείξτε ότι η εικόνα της f είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.

(iii) Υπολογίστε τον πυρήνα της f.

(iv) Βρείτε ένα υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$, διάστασης 2, τέτοιο ώστε $f(V) = \mathrm{Im}\,(f)$.

(v) Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $f(v) = (0, 1, -1)$.

(vi) Βρείτε ένα υπόχωρο W του $\mathbb{R}^3$, τέτοιο ώστε $f(W) = \langle (0, 1, -1) \rangle$.

(vii) Είναι η $f : W \to \mathbb{R}^3$ ένα-προς-ένα;

Άσκηση 8.4 Έστω V, W γραμμικοί χώροι με βάσεις $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ και $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ αντίστοιχα. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$, με $L(v_1) = w_1 + 2w_2 + w_3$, $L(v_2) = -w_1 + w_3$, $L(v_3) = -w_1 + 2w_2 + 3w_3$, $L(v_4) = 2w_2 + 2w_3$. Βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της L.

Άσκηση 8.5 Δείξτε ότι η απεικόνιση $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ με τύπο $L(p(x)) = p(x + 1) - p(x)$ είναι επιμορφισμός.

Άσκηση 8.6 Έστω $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x + y + z = 0\}$. Βρείτε ισομορφισμούς $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ και $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V$.

Άσκηση 8.7 Έστω V, W δ.χ. πεπερασμένης διάστασης και X υπόχωρος του V. Δείξτε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $T : X \to W$ μπορεί να επεκταθεί σε γραμμική απεικόνιση $\hat{T} : V \to W$, δηλαδή υπάρχει $\hat{T} : V \to W$ γραμμική με $\hat{T}(x) = T(x)$ για κάθε $x \in X$.

Άσκηση 8.8 Εάν V γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και x διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ που δεν ανήκει στον V τότε βρείτε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ώστε $f(v) = 0$ για κάθε $v \in V$ και $f(x) = 1$.