

8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Για τις ομάδες \mathbb{Z}_3 και \mathbb{Z}_6 :
 - (α) Βρείτε τον πίνακα πράξης τους
 - (β) Βρείτε την τάξη όλων των στοιχείων τους.
2. Έστω U_n το σύνολο των n -στων μιγαδικών ριζών της μονάδος. Δείξτε ότι το U_n είναι ομάδα με πράξη των πολλαπλασιασμό. Κατόπιν βρείτε την τάξη των παρακάτω στοιχείων της ομάδας U_n , για τις επιλεγμένες τιμές του n .
 - (α) $n = 6, \zeta = e^{\frac{4\pi i}{6}}$,
 - (β) $n = 6, \zeta = e^{\frac{10\pi i}{6}}$,
 - (γ) $n = 12, \zeta = e^{\frac{4\pi i}{12}}$,
 - (δ) $n = 12, \zeta = e^{\frac{6\pi i}{12}}$,
 - (ε) $n = 12, \zeta = e^{\frac{10\pi i}{12}}$.
3. Έστω \mathbb{C}^* η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Βρείτε την τάξη των κυκλικών υποομάδων της \mathbb{C}^* που παράγονται από τα στοιχεία: $i, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, 1+i$.
4. Βρείτε την τάξη των παρακάτω στοιχείων της πολλαπλασιαστικής ομάδας $GL_4(\mathbb{R})$ των 4×4 αντιστρέψιμων πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Έστω (G, \star) ομάδα με $2n$ στοιχεία. Με την χρήση του πίνακα πράξης της G δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο a της ομάδας, που δεν είναι το ουδέτερο, με την ιδιότητα $a = a^{-1}$.