Χειμερινό εξάμηνο 2022-23 - Άλγεβρα Ι

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Γράψτε τό πολυώνυμο $[2]x^3 + x^2 + [2]x + [2]$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$.

2. Βρείτε τό υπόλοιπο τής διαίρεσης τού $x^{162} - [3]x^{33} + x^{18} - [1]$ διά τού $x - [2]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{17}[x]$ (Υπόδειξη: Ποιό είναι τό υπόλοιπο τής διαίρεσης ενός πολυωνύμου $f(x)$ διά τού $x - [a]$;).

3. (α΄) Είναι ο δακτύλιος $\mathbb{R}$ ισόμορφος με τον δακτύλιο $\mathbb{C}$;

   (β΄) Είναι ο δακτύλιος $2\mathbb{Z}$ ισόμορφος με τόν δακτύλιο $3\mathbb{Z}$;

4. (α΄) Δείξτε ότι αν $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων τότε ή ϕ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός (δηλ. $\phi(m) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$) ή ϕ είναι ο ταυτοτικός (δηλ. $\phi(m) = m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$). *Υπόδειξη:* εξετάστε τήν τιμή τού $\phi(1)$ και δείξτε ότι θα πρέπει $\phi(1) = 0$ ή 1).

   (β΄) Υπάρχει, μη μηδενικός, ομομορφισμός δακτυλίων από τό σώμα $\mathbb{Q}$ τών ρητών στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ τών ακεραίων; *Υπόδειξη:* δείξτε όπως παραπάνω ότι θα πρέπει $\phi(1) = 0$.

5. Θεωρούμε τήν $\phi : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_5$ με $\phi([a]_{20}) = [a]_5$.

   (α΄) Δείξτε ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (δηλ. ο ορισμός της δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπου στην κλάση $[a]_{20}$).

   (β΄) Δείξτε ότι η ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και βρείτε τόν πυρήνα του και τήν εικόνα του.

   (γ΄) Υπάρχει μή μηδενικός ομομορφισμός δακτυλίων $\psi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{20}$;

6. (α΄) Δείξτε ότι οι απεικονίσεις $\pi : R \times S \to R$, με $\pi((r, s)) = r$ και $i : R \to R \times S$ με $i(r) = (r, 0_S)$ είναι ομομορφισμοί δακτυλίων και βρείτε τόν πυρήνα τους.

   (β΄) Έστω ότι οι R, S είναι ακέραιες περιοχές. Είναι ο δακτύλιος $R \times S$ ακέραια περιοχή;

7. Έστω I ιδεώδες δακτυλίου R με μοναδιαίο στοιχείο 1_R.

   (α΄) Δείξτε ότι $1_R \in I$ αν και μόνον αν $I = R$.

   (β΄) Έστω $a \in R$ αντιστρέψιμο με $a \in I$. Τότε $I = R$.

   (γ΄) Δείξτε ότι τα μόνα ιδεώδη ενός σώματος K είναι το $\{0\}$ και το K.

   (δ΄) Έστω K σώμα και S ένας δακτύλιος. Δείξτε ότι κάθε μή μηδενικός ομομορφισμός $\phi : K \to S$ είναι μονομορφισμός.

8. Εξετάστε ποιά από τά παρακάτω υποσύνολα τού δακτυλίου $\mathbb{R}[x]$ είναι ιδεώδη:

   (α΄) $A = \{f(x) \in \mathbb{R}[x],\ 5 \mid f(2)\}$,

   (β΄) $B = \{f(x) \in \mathbb{R}[x],\ (x-1)^2 \mid f(x)\}$,

   (γ΄) $C = \{f(x) \in \mathbb{R}[x],\ f(1) \in \mathbb{Q}\}$.

9. Έστω a ακέραιος. Να δειχθεί ότι $a^{33} \equiv a \mathrm{mod}(15)$.