

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Διαιρέστε το $f(x) = x^5 - x^3 + [3]x - [5]$ με το $g(x) = [2]x^2 + [7]$, θεωρώντας τα ως πολυώνυμα :
 - (α) τού $\mathbb{Z}_3[x]$,
 - (β) τού $\mathbb{Z}_9[x]$.
2. (α) Κάνετε τήν διαίρεση τού πολυωνύμου $f(x) = [2]x^4 + x^3 + x^2 + [6]x + [2]$ διά τού $g(x) = [2]x^2 + [1]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_7[x]$.
 (β) Κάνετε τήν διαίρεση τού πολυωνύμου $[2]x^5 - x^3 + [3]x - [1]$ διά τού $[4]x^2 + [3]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$.
3. Να βρεθεί ο μ.κ.δ. $d(x)$ τών πολυωνύμων $f(x) = x^3 + [4]x^2 - x + [1]$ και $g(x) = x^3 - x^2 + x + [4]$ τού $\mathbb{Z}_5[x]$. Να γραφεί τό $d(x)$ ως $d(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$, για κάποια $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$.
4. Γράψτε τό πολυώνυμο $x^4 - 1$ ως γινόμενο μονικών αναγώγων πολυωνύμων, θεωρώντας το ως πολυώνυμο τών δακτυλίων $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$.
5. (α) Αναλύστε τό πολυώνυμο $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ σε γινόμενο τριών μή σταθερών πολυωνύμων τού $\mathbb{Q}[x]$.
 (β) Αναλύστε τό πολυώνυμο $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ σε γινόμενο τριών μή σταθερών πολυωνύμων τού $\mathbb{Q}[x]$, όπως επίσης, και σε γινόμενο επτά πρωτοβάθμιων πολυωνύμων τού $\mathbb{C}[x]$.
6. (α) Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $x^6 + x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ δεν είναι ανάγωγο (Υποδείξη: συσχετίστε το με τό $x^8 - 1$).
 (β) Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ δεν είναι ανάγωγο (Υποδείξη: συσχετίστε το με τό $x^6 - 1$).
 (γ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 - 22x^2 + 1$ είναι ανάγωγο στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.
7. Για τά παρακάτω πολυώνυμα, βρείτε τίς αναλύσεις τους σε γινόμενο μονικών αναγώγων πολυώνυμων :
 - (α) $f(x) = x^4 - 16 \in \mathbb{C}[x]$.
 - (β) $f(x) = x^4 - 16 \in \mathbb{R}[x]$.
 - (γ) $f(x) = x^4 + 16 \in \mathbb{C}[x]$.
 - (δ) $f(x) = x^4 + 16 \in \mathbb{R}[x]$.
8. (α) Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο.
 (β) Κάνοντας την διαίρεση τού $x^4 + [1]$ δια τού $x^2 + x + [2]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_3[x]$, δείξτε ότι το $x^4 + [1]$ δεν είναι ανάγωγο πολυώνυμο στον $\mathbb{Z}_3[x]$.
9. (α) Βρείτε τήν ανάλυση τού $x^6 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ σε γινόμενο μονικών αναγώγων πολυώνυμων.
 (β) Βρείτε τήν ανάλυση τού $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 6x + 9 \in \mathbb{R}[x]$ σε γινόμενο μονικών αναγώγων πολυωνύμων. (Υπόδειξη: το $f(x)$ έχει ως ρίζα του τό $i\sqrt{3}$)
10. Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Δείξτε ότι αν τό $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, είναι ρίζα τού $f(x)$ τότε και τό $a - b\sqrt{2}$ είναι ρίζα τού $f(x)$.
11. Βρείτε όλα τά μονικά ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού ≤ 2 στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_3[x]$. Δείξτε ότι τό γινόμενό τους ισούται προς $x^9 - x$.
12. Βρείτε όλα τά ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 4 στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2[x]$.