Φυλλάδιο 4° Ασκήσεις

Άσκηση 1η Να αποδείξετε ότι η σχέση $(a,s)\sim(b,t) :\Longleftrightarrow$
$\exists u \in S$ τ.ω. $(at-bs)u=0$
είναι σχέση ισοδυναμίας

Άσκηση 2η Να αποδείξετε ότι στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $(S^{-1}R, \oplus, \odot)$, οι πράξεις είναι καλά ορισμένες και ο $(S^{-1}R, \oplus, \odot)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο.

Άσκηση 3η Να αποδείξετε ότι:

(i) $\forall s \in S$ $\left(\begin{array}{l} \text{η } f : R \to S^{-1}R \\ \quad a \mapsto \frac{a}{1} = [(a,1)] \end{array} \right)$

το $f(s)$ είναι μονάδα του $S^{-1}R$

(ii) $\ker f = \{ a \in R \mid a \cdot s = 0$, για κάποιο $s \in S \}$

(iii) Αν $0 \notin S$ και το S δεν περιέχει διαιρέτες του μηδενός, τότε ο f είναι μονομορφισμός δακτυλίων

(iv) Αν το S αποτελείται από μονάδες του R, τότε ο f είναι ισομορφισμός

Άσκηση 4η Αν M, N R-modules και $\varphi: M \to N$ ομομορφισμός από R-modules και S πολλ/κά κλειστό σύνολο του R τότε η $S^{-1}\varphi : S^{-1}M \to S^{-1}N$ ορίζεται ως: $S^{-1}\varphi\left(\frac{m}{s}\right) := \frac{\varphi(m)}{s}$

Να αποδείξετε ότι είναι καλά ορισμένος ομομορφισμός από $S^{-1}R$-modules.

Άσκηση 5η Αν N και P υποmodule του R-module M, τότε ισχύει:

(i) $S^{-1}(N+P) = S^{-1}N + S^{-1}P$

(ii) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$

(iii) $S^{-1}(\mathrm{Rad}\,A) = \mathrm{Rad}\,(S^{-1}A)$

Άσκηση 6η Έστω R δακτύλιος και S, T δύο πολλαπλασιαστικά κλειστοί υποσύνολοι του R. Έστω U η εικόνα του T στο $S^{-1}R$. Να αποδείξετε ότι οι δακτύλιοι $(ST)^{-1}R$ και $U^{-1}(S^{-1}R)$ είναι ισόμορφοι.

Άσκηση 7 Υποθ. ότι για κάθε πρώτο ιδεώδες P του δακτυλίου R, ο τοπικός δακτύλιος R_P δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία $\neq 0$. Να αποδείξετε ότι τότε και ο R δεν έχει μηδενοδύναμα $\neq 0$.

Αν κάθε R_P είναι ακεραία περιοχή, τότε είναι, κατ' ανάγκη και ο R ακεραία περιοχή;