ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Ασκήσεις
φυλλάδιο 3°

(1) Έστω $f: R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι επιμορφισμός, τότε η αντίστροφη εικόνα ενός maximal ιδεώδους του S είναι maximal ιδεώδες του R

Ορισμός Έστω M ένα R-module. Το ριζικό του M, $Rad(M)$, ορίζεται ως η τομή όλων των maximal ιδεωδών του R τα οποία περιέχουν τον $Ann(M)$

(2) Να αποδείξετε ότι

$$Rad\left(\frac{R}{Ann(M)}\right) = \frac{Rad(M)}{Ann(M)}$$

(3) Έστω M ένα R-module, $x \in Rad(M)$ και $m \in M$. Αν $(1+x)m = 0$, να αποδείξετε ότι $m = 0$

(4) Έστω M ένα R-module και $A \trianglelefteq R, B \trianglelefteq R$. Θεωρούμε το R-module $\frac{M}{AM} =: N$

Να αποδείξετε ότι $\frac{M}{(A+B)M} \cong \frac{N}{BN}$

(5) Έστω M, R-module και $\varphi \in End_R(M)$, τ.ω. $\varphi^2 = \varphi$. (i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in Im\varphi$, ισχύει $\varphi(a) = a$ (ii) Να αποδείξετε ότι $M = ker\varphi \oplus Im\varphi$
(iii) Αν $\psi := 1_M - \varphi$, τότε ισχύει $\psi^2 = \psi$