

Ασκήσεις Φυλλάδιο 2^ο

- 1) Αν A_1, A_2, \dots, A_n ιδεώδη του R και P πρώτο ιδεώδες του R , τότε να αποδείξετε τα εξής:
- (i) $A_1 A_2 \dots A_n \subseteq P \Leftrightarrow A_k \subseteq P$ για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, n\}$
- (ii) Αν $P = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ τότε $\Rightarrow P = A_k$ για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, n\}$
- 2) Αν R ένας δακτύλιος της Noether και $A \trianglelefteq R$. Να αποδείξετε ότι $\exists \epsilon \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα $[\text{Rad}(A)]^\epsilon \subseteq A$
- 3) Να βρείτε ένα ριζικό ιδεώδες του \mathbb{Z}_6 το οποίο να μην είναι πρώτο
- 4) Να αποδείξετε ότι στο δακτύλιο $K[x, y]$ το ιδεώδες $\langle xy \rangle$ είναι radical αλλά όχι πρώτο.
- 5) Το ιδεώδες $A \trianglelefteq R, R = \mathbb{Z}[x]$
 $A := \langle x+1, x^2+2, x^3+3, \dots, x^n+n, \dots \rangle$
Να βρείτε ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του A

6) Έστω M ένα R -module και M_1, M_2 δύο υποmodules του M .
Να αποδείξετε ότι $M = M_1 \oplus M_2$
τότε και μόνο τότε όταν
 $M = M_1 + M_2$ και $M_1 \cap M_2 = \{0\}$

7) Έστω R ακεραίοι περιοχή και $x \in R, x \neq 0$
Έστω M του υποmodule του βάρους
πλητικό για το οποίο ισχύει:
 $M = \langle 1, x^{-1}, x^{-2}, \dots \rangle$
Υποθέτουμε ότι το M είναι πεπερασμένο
παραγόμενο. Να αποδείξετε ότι $x^{-1} \in R$
και να συμπεράνετε ότι $M = R$

Op Ένα ιδεώδες $A \leq R$ λέγεται ανάγωγο όταν
από $A = B \cap C, B \leq R, C \leq R$ έπεται ότι $A = B$ ή $A = C$.

(8) Να αποδείξετε ότι, αν $P \in \text{Spec}(R) \Rightarrow P$ ανάγωγο

(9) Να αποδείξετε ότι το $A = \langle 6 \rangle = 6\mathbb{Z}$ στον
δακτύλιο $R = \mathbb{Z}$ δεν είναι ανάγωγο (φυσικά
και όχι πρώτο!)

(10) Να αποδείξετε ότι το ιδεώδες $A = \langle 4 \rangle = 4\mathbb{Z}$
του δακτύλιου $R = \mathbb{Z}$ είναι ανάγωγο αλλά
όχι πρώτο.
