5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. (α') Έστω R δακτύλιοςμε 1_R και S_0 τό υποσύνολο τού $R[x]$ που περιέχει τά πολυώνυμα με σταθερό όρο μηδέν (δηλ. $a_0 = 0$). Δείξτε ότι τό S_0 είναι υποδακτύλιος τού $R[x]$. Ισχύει τό ίδιο αν ο σταθερός όρος είναι τό 1_R;

   (β') Έστω R δακτύλιος και $a \in R$. Ορίζουμε ως $S_a = \{f(x) \in R[x] \ \text{ με } \ f(a) = 0\}$. Δείξτε ότι τό S_a είναι υποδακτύλιος τού $R[x]$.

2. Να υπολογίσετε τά παρακάτω γινόμενα στο $\mathbb{Z}_5[x]$:

   (α') $(-[4] + x + [3]x^2)([3] - x + [3]x^2)$.

   (β') $([1] - [2]x^2 + [3]x^6)([2] + [2]x + [7]x^2)$.

3. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $f(x)$ τού $\mathbb{Z}[x]$ που ικανοποιύν την συνθήκη $f(x) = f(-x)$. Ομοίως, να βρεθούν όλα τά πολυώνυμα τού $\mathbb{Z}_2[x]$ που ικανοποιούν τήν παραπάνω συνθήκη.

4. Να βρεθούν τα αντιστρέψιμα στοιχεία στους παρακάτω δακτυλίους

   (α') $\mathbb{Z}[x]$.

   (β') $\mathbb{Z}_5[x]$.

5. Πόσα πολυώνυμα βαθμού ≤ 2 υπάρχουν στο $\mathbb{Z}_5[x]$;

6. (α') Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $[3] + [2]x + [2]x^2$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_4[x]$ (Υπόδειξη: ποιό είναι τό $f(x)^2$;).

   (β') Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $[3] + [4]x \in \mathbb{Z}_8[x]$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_8[x]$.

   (γ') Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $[2] + x \in \mathbb{Z}_8[x]$ δεν είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_8[x]$.

   (δ') Έστω $f(x) = [a_0] + [a_1]x + \cdots + [a_n]x^n \in \mathbb{Z}_4[x]$. Δείξτε ότι αν $[a_0] = [1]$ ή $[3]$ και, επίσης, για κάθε $i \geq 1$ έχουμε $[a_i] = [0]$ ή $[2]$ τότε το $f(x)$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_4[x]$.

7. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με 1_R.

   (α') Έστω ότι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$, όπου $a_n \neq 0$, είναι διαιρέτης τού μηδενός. Δείξτε τότε ότι τό $a_n \in R$ είναι διαιρέτης τού μηδενός. Ισχύει και τό αντίστροφο;

   (β') Έστω ότι τό πολυώνυμο $f(x) = a + bx$ είναι αντιστρεψιμο. Δείξτε τότε ότι το a είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R και το b μηδενοδύναμο στοιχείο τού R. Ισχύει και τό αντίστροφο;

8. Έστω p πρώτος αριθμός και $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ πολυώνυμο βαθμού $> p$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο $g(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ βαθμού $< p$ με $f([a]) = g([a])$ γιά κάθε $[a] \in \mathbb{Z}_p$.

9. (α') Δείξτε ότι για $[a], [b] \in \mathbb{Z}_p$ έχουμε $([a] + [b])^p = [a]^p + [b]^p$.

   (β') Δείξτε ότι $x^p - [1] = (x - [1])^p$ στο $\mathbb{Z}_p[x]$.

10. Έστω $M_2(\mathbb{Z}_2)$ ο δακτύλιος των 2×2 πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{Z}_2$.

    (α') Πόσα στοχεία έχει ο $M_2(\mathbb{Z}_2)$;

    (β') Ποιά είναι τα αντιστρέψιμα στοιχεία του;

11. Έστω $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ ένας θετικός ακέραιος ελεύθερος τετραγώνων, δηλ. που δεν είναι τής μορφής $d = m^2$ για καποιον ακέραιο m.

    (α') Δείξτε ότι ο $\sqrt{d}$ είναι άρρητος αριθμός.

(β΄) Δείξτε ότι τό σύνολο $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{m + n\sqrt{d}, \ \ m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποδακτύλιος τού δακτυλίου τών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

(γ΄) Δείξτε ότι η απεικόνιση $N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}$ που ορίζεται ως $N(m + n\sqrt{d}) = m^2 - dn^2$ ικανοποιεί τήν ιδιότητα $N(ab) = N(a)\,N(b)$, για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

(δ΄) Δείξτε ότι αν $m^2 - dn^2 = \pm 1$ τότε τό στοιχείο $m + n\sqrt{d}$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Κατόπιν, μέ χρήση τού ερωτήματος γ), δείξτε και το αντίστροφο, δηλ, αν τό στοιχείο $m + n\sqrt{d}$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ τότε $m^2 - dn^2 = \pm 1$.