4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Στο μαθημα είδαμε ότι τό σύνολο $\mathbb{Z}[i] = \{m + in,\ m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ εφοδιασμένο με τήν συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό τών μιγαδικών αριθμών είναι μεταθετικός δακτύλιος. Βρείτε τά αντιστρέψιμα στοιχεία του. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;

2. Εστω M τό σύνολο τών 2×2 πινάκων τής μορφής $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τό M εφοδιασμένο με τήν συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πινάκων είναι σώμα.

3. Στο μαθημα είδαμε ότι τό σύνολο $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2},\quad m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποδακτύλιος τού δακτυλίου τών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $s \in \mathbb{Z}_{>0}$, τό στοιχείο $(3 - 2\sqrt{2})^s$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

4. (α΄) Δείξτε ότι τό σύνολο $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5},\ \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι υπόσωμα τού σώματος τών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

   (β΄) Δείξτε ότι τό σύνολο $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi,\ \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι υπόσωμα τού σώματος τών μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

5. Έστω $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{συνεχής συνάρτηση}\}$. Στο S ορίζονται οι πράξεις τού αθροίσματος και τού γινομένου δύο συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι τό S εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις είναι ενας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Ποιά είναι τά αντιστρέψιμα στοιχεία τού S; Έχει ο S διαιρέτες τού μηδενός;

6. (α΄) Έστω S_1 και S_2 υποδακτύλιοι δακτυλίου R. Δείξτε ότι η τομή τους $S_1 \cap S_2$ είναι υποδακτύλιος τού R. Ισχύει τό ίδιο για τήν ένωσή τους $S_1 \cup S_2$;

   (β΄) Αν $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι τό $n\mathbb{Z}$ (δηλ. τό συνολο τών πολλάπλασίων τού n) είναι υποοδακτύλιος τού $\mathbb{Z}$.

   (γ΄) Δείξτε ότι αν $n, m \in \mathbb{N}$ τότε $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = e\mathbb{Z}$, όπου e είναι τό ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των n και m.

7. Βρείτε όλους τούς διαιρέτες τού μηδενός στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{20}$. Γιά κάθε τέτοιο μηδενοδιαιρέτη $[a]$ βρείτε ένα στοιχείο $[b] \neq [0]$ με $[a][b] = [0]$.

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

   (α΄) $x^2 - [2]x + [2] = [0]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$. (δηλ. να βρεθούν όλα τα $[a] \in \mathbb{Z}_6$ με $[a]^2 - [2][a] + [2] = [0]$).

   (β΄) $x^2 + [2]x - [2] = [0]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$.

9. Για να βρούμε τις ακέραιες λύσεις τής εξίσωσης $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ δουλεύουμε ως εξής:

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3)(x+1) = 0 \iff x = 0, 3, -1\,.$$

   Η παραπάνω παραγοντοποίηση ισχύει και στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{12}$. Όμως η παραπάνω εξίσωση έχει ως λύσεις στον $\mathbb{Z}_{12}$, εκτός τών $[0],\ [3], [-1] = [11]$, και τήν $[8]$. Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση για αυτό;

10. Εστω p πρώτος αριθμός. Ορίζουμε ως

$$A_p = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ \text{όπου } m, n \in \mathbb{Z} \text{ και μ.κ.δ.}\,(p, n) = 1\} \subseteq \mathbb{Q}\,.$$

   (α΄) Δείξτε ότι τό A_p εφοδιασμένο με τήν συνήθη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό είναι μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

(β΄) Βρείτε τά αντιστρέψιμα στοιχεία του.

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α΄) Δείξτε ότι τό σύνολο τών πινάκων τής μορφής $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, με $a, b, c \in \mathbb{Z}$ εφοδιασμένο με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πινάκων είναι δακτύλιος. Βρείτε τά αντιστρέψιμα στοιχεία του. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;

(β΄) Δείξτε ότι τό σύνολο τών πινάκων τής μορφής $\begin{pmatrix} a & [b] \\ 0 & c \end{pmatrix}$, με $a, c \in \mathbb{Z}$ και $[b] \in \mathbb{Z}_2$, εφοδιασμένο με τήν συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πινάκων είναι δακτύλιος. Δείξτε ότι τό στοιχείο $\begin{pmatrix} 2 & [1] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ τού παραπάνω δακτυλίου είναι αριστερός αλλά όχι δεξιός μηδενοδιαιρέτης.

12. Δείξτε ότι τό σύνολο $S = \{\frac{a}{2^n},\ a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ εφοδιασμένο με τήν συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό τών ρητών αριθμών είναι μεταθετικός δακτύλιος. Βρείτε τά αντιστρέψιμα στοιχεία του. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;