ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-23
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης, Μιχάλης Ταρουδάκης

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Στο εργαστήριο να γίνουν τουλάχιστον οι ασκήσεις: 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8.

Άσκηση 4.1 Ποια από τα επόμενα υποσύνολα W του $\mathbb{R}^3$ είναι πράγματι υπόχωροι;

(1) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$

(2) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$

(3) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$

(4) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$

(5) $W = \{(0, 0, 0)\}$

(6) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - y + 3x = 0\}$

(7) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2\}$

(8) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = 0 \text{ και } y + z = 0\}$

(9) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \text{ είναι ρητός}\}$

Για όσα σύνολα είδατε ότι είναι υπόχωροι βρείτε και ένα σύνολο διανυσμάτων τους που να τα παράγει.

Άσκηση 4.2 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Εξετάστε εάν το διάνυσμα $(1, -2, -1)$ ανήκει στο χώρο στηλών του A. Βρείτε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ το οποίο δεν ανήκει στο χώρο στηλών του A.

Άσκηση 4.3 Θεωρούμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a. Εξετάστε εάν τα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Εάν δεν είναι, δώστε μία σχέση γραμμικής εξάρτησης.

b. Εξετάστε εάν $w \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

c. Εξετάστε εάν $v_1, v_2 \in \langle v_3, v_4, w\rangle$.

Άσκηση 4.4

(1) Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να πληρούν τα b_1, b_2, b_3 ώστε το διάνυσμα $b = (b_1, b_2, b_3)$ να ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) Βρείτε την γενική λύση του $Ax = b$ όταν $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$.

(3) Βρείτε σύνολο διανυσμάτων $S \subseteq \mathbb{R}^4$ που να αποτελούν βάση του $\mathcal{N}(A)$.

(4) Δείξτε ότι το διάνυσμα $v = (-1, 0, 1, 1)$ ανήκει στον $\mathcal{N}(A)$ και γράψτε το v σαν γραμ. συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης S που βρήκατε.

(5) Βρείτε βάση για το χώρο στηλών του πίνακα.

(6) Βρείτε βάση για το χώρο γραμμών του πίνακα.

Άσκηση 4.5 Δείξτε ότι αν τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμ. ανεξάρτητα τότε και τα $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ είναι γραμ. ανεξάρτητα.

Άσκηση 4.6 Δίνονται τα διανύσματα $x = (2, 3, 5), y = (1, 1, 2)$ και $v = (a, b, c)$. Βρείτε μια αναγκαία συνθήκη στα a, b, c ώστε να είναι το σύνολο $\{x, y, v\}$ γραμμικά εξαρτημένο. Κατόπιν βρείτε ένα διάνυσμα z ώστε το σύνολο $\{x, y, z\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο

Άσκηση 4.7 Στον $\mathbb{R}^3$ δώστε 4 διανύσματα ώστε κάθε 2 απο αυτά να είναι ανεξάρτητα ενώ κάθε 3 από αυτά εξαρτημένα.

Άσκηση 4.8 Βρείτε μία βάση για καθε ένα από τους εξής υπόχωρους του R^4:

(1) Ολα τα διανύσματα των οποίων οι συνιστώσες είναι ίσες.

(2) Ολα τα διανύσματα των οποίων οι συνιστώσες έχουν άθροισμα 0.

(3) Ολα τα διανύσματα που είναι κάθετα στα $(1, 1, 0, 0)$ και $(1, 0, 1, 1)$.

(4) Του $V = \langle (1, 0, 1, -1), (-2, 1, -1, 0), (1, 1, 2, -3), (0, 2, 2, -4)\rangle$.

Άσκηση 4.9

Στον δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$ των 2 επί 2 πινάκων πάνω από το $\mathbb{R}$, δώστε 5 γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα (πίνακες) που να παράγουν όλο τον χώρο. Πόσα από αυτά που βρήκατε είναι ανεξάρτητα;

Άσκηση 4.10

a. Βρείτε εναν πίνακα A του οποίου ο χώρος στηλών να περιέχει τα $(1, 1, 0)$ και $(0, 1, 1)$, ενώ ο μηδενόχωρος το $(1, 1, 1, 1)$.

b. Βρείτε έναν 2 επί 2 πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος είναι ίσος με τον χώρο στηλών του.

c. Βρείτε εναν πίνακα A του οποίου ο μηδενόχωρος αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $(1, 1, 2), (0, 1, 1)$.

d. Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο μηδενοχώρος παράγεται από τα διανύσματα $(2, 2, 1, 0)$ και $(3, 1, 0, 1)$.

Άσκηση 4.11 Γράψτε όλες τις σχέσεις που μπορείτε να έχετε για τα r, m, n, αν ο $m \times n$ πίνακας A έχει r οδηγούς και για το σύστημα $Ax = b$ ισχύει:

a. υπάρχουν κάποια b για τα οποία δεν έχει λύση.

b. για κάθε b έχει άπειρες λύσεις.

c. υπάρχει ακριβώς μία λύση για κάποια b, καμία λύση για κάποια άλλα b.

d. ακριβώς μία λύση για κάθε b.

Άσκηση 4.12 Βρείτε μία βάση για το επίπεδο $x - 2y + 3z = 0$ στον R^3. Στη συνέχεια βρείτε μία βάση της τομής του παραπάνω επιπέδου με το $x + y + z = 0$.

Άσκηση 4.13 Αν S συλλογή διανυσμάτων ώστε κάθε 2 διανύσματα του S είναι εξαρτημένα. Δείξτε ότι όλα τα διανύσματα του S είναι πολ/σια ενός διανύσματος.