Χειμερινό εξάμηνο 2022-23 - Άλγεβρα Ι

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. (α΄) Βρείτε όλες τις λύσεις τού παρακάτω συστήματος ισοτιμιών:

$$x \equiv 1 \bmod 10, \quad x \equiv 3 \bmod 9.$$

   (β΄) Βρείτε όλες τις λύσεις τού παρακάτω συστήματος ισοτιμιών:

$$7x \equiv 1 \bmod 10, \quad 5x \equiv 3 \bmod 9.$$

2. (α΄) Έστω m, n σχετικά πρώτοι θετικοί ακέραιοι και $a \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι οι λύσεις τού συστήματος

$$x \equiv a \bmod m, \quad x \equiv a \bmod n$$

   είναι οι ίδιες με τις λύσεις τής εξίσωσης $x \equiv a \bmod (mn)$. Ισχύει τό ίδιο όταν $(m, n) \neq 1$;

   (β΄) Βρείτε όλες τις λύσεις τού παρακάτω σύστηματος ισοτιμιών:

$$x \equiv 10 \bmod 4, \quad x \equiv -7 \bmod 9.$$

3. (α΄) Βρείτε όλες τις λύσεις τού παρακάτω συστήματος ισοτιμιών:

$$x \equiv 0 \bmod 2, \quad x \equiv 1 \bmod 5, \quad x \equiv 6 \bmod 9.$$

   (β΄) Βρείτε τόν μικρότερο θετικό ακέραιο που ικανοποιεί το σύστημα ισοτιμιών:

$$x \equiv 1 \bmod 5, \quad x \equiv 3 \bmod 7, \quad x \equiv 5 \bmod 9.$$

4. Αν τά μολύβια που περιέχονται σε ένα κουτί τά μοιράσουμε ανά τρία τότε περισσεύει ένα μολύβι στο κουτί, αν τά μοιράσουμε ανά 4 τότε περισσεύουν 3 μολύβια ενώ αν τά μοιράσουμε ανά πέντε τότε δεν περισσεύει κανένα μολύβι. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός μολυβιών που μπορεί να περιέχει τό κουτί;

5. Βρείτε όλα τα πολλαπλάσια τού 13 που αφήνουν υπόλοιπο 9 όταν τα διαιρέσουμε με τό 10 και με τό 11.

6. Υπολογίστε τούς αριθμούς Euler $\phi(35),\ \phi(48),\ \phi(10000)$.

7. (α΄) Βρείτε όλα τα $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $\phi(a) = 6$.

   (β΄) Βρείτε όλα τα $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $\phi(a) =$περιττός.

   (γ΄) Αν $a \mid b$ δείξτε ότι $\phi(a) \mid \phi(b)$.

8. (α΄) Βρείτε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού 7^{1000} διά 24.

   (β΄) Βρείτε τό υπόλοιπο τής διαίρεσης τού 641^{108002} διά 63.

   (γ΄) Βρείτε το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο τών αριθμών 7^{123} και $7^{7^{15}}$.

   (δ΄) Υπολογίστε τα δύο τελευταία ψηφία τών αριθμών 9^{2014} και $7^{7^{16}}$.

9. (α΄) Σήμερα είναι Τρίτη. Τι μέρα θα είναι σε 2018^{1972} ημέρες;

   (β΄) Ποιά ένδειξη δείχνει ένα 24-ωρο ρολόι, 5^{19} ώρες μετά τίς 3:00;

10. (α΄) Έστω $a, m, k \in \mathbb{Z}$ με $m, k \geq 1$ και $(a, m) = 1$. Δείξτε ότι $a^{\phi(n^k)} \equiv 1 \bmod m$.

    (β΄) Έστω $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $(m, n) = 1$. Δείξτε ότι $m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \bmod mn$.