

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Στο εργαστήριο να γίνουν τουλάχιστον οι ασκήσεις 3.1 a), 3.2 b) και c), 3.3 a), 3.4, 3.7 και όσες άλλες προλάβετε. Οι υπόλοιπες είναι για εξάσκηση στο σπίτι (φυσικά αν υπάρχουν απορίες ευχαρίστως να τις συζητήσουμε).

Άσκηση 3.1 Λύστε τα παρακάτω ομογενή συστήματα και δώστε την λύση σε διανυσματική μορφή (γενική παραμετρική λύση). Δώστε επίσης 5 μη μηδενικές λύσεις του συστήματος α).

$$a) \left\{ \begin{array}{cccc} -x_1 & & + 2x_3 & + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 & + x_2 & - x_3 & + x_4 = 0 \\ 2x_1 & + x_2 & + x_3 & + 6x_4 = 0 \end{array} \right\}, \quad b) \left\{ \begin{array}{ccc} x & + & + 2z = 0 \\ 2x & + 2y & + 3z = 0 \\ 3x & + 2y & + 5z = 0 \end{array} \right\},$$
$$c) \left\{ \begin{array}{cccc} 2x & + 2y & + 5z & + 3w = 0 \\ 6x & + y & + 5z & + 4w = 0 \\ 4x & - y & & + w = 0 \end{array} \right\}$$

Άσκηση 3.2 Να λυθούν τα μη-ομογενή γραμμικά συστήματα με τους ακόλουθους επαυξημένους πίνακες:

$$a) \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right], \quad b) [1 \ 0 \ 3 \ 5 \ | \ 9],$$
$$c) \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right], \quad d) \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right].$$

Μπορείτε να δώσετε την γενική διανυσματική λύση των αντίστοιχων ομογενών χωρίς να λύσετε ξανά τα συστήματα;

Άσκηση 3.3 Βρείτε για ποιές τιμές των παραμέτρων $a, b \in \mathbb{R}$, καθένα από τα παρακάτω συστήματα: (i) δεν έχει λύση, (ii) έχει άπειρες λύσεις, (iii) έχει μοναδική λύση. Λύστε το σύστημα στις δύο τελευταίες περιπτώσεις.

$$a) \left\{ \begin{array}{ccc} x - y + z = 1 \\ ax & & + z = b \\ x + y + 2z = 3 \end{array} \right\}, \quad b) \left\{ \begin{array}{ccc} x + y + z = a \\ x - y & & = 0 \\ 3x + y + bz = 0 \end{array} \right\}$$

Άσκηση 3.4 Βρείτε ποιά σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει λύση.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & & - z = a \\ -x + y & & = b \\ -2x + y + z & & = c \end{array} \right\}$$

Άσκηση 3.5 Βρείτε γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων

$$(3, -1, 2), (1, -1, 4), (2, 0, -1)$$

ώστε

- Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2,
- Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη -2 ,
- Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη 2,

Είναι αυτά τα αποτελέσματα μοναδικά;

Άσκηση 3.6 Θεωρούμε τα επίπεδα του \mathbb{R}^3 με εξισώσεις $x + y + z = 1$, $2x - y + z = 2$ και $x + 2y + z = 1$. Βρείτε την τομή τους στον \mathbb{R}^3 . Μπορείτε να αλλάξετε την τρίτη εξίσωση ώστε να πάρετε ένα σύστημα που δεν έχει λύσεις;

Άσκηση 3.7 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς. Όλες οι προτάσεις αναφέρονται σε ένα σύστημα $Ax = b$, όπου $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$.

- Εάν $m > n$ και $b \neq 0$, το σύστημα είναι αδύνατο.
- Εάν $m < n$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
- Εάν $m < n$ και $b = 0$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
- Εάν το σύστημα $Ax = 0$ έχει άπειρες λύσεις, τότε και το σύστημα $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις.
- Εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις, τότε και το $Ax = 0$ έχει άπειρες λύσεις.
- Εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση, τότε και το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση.
- Εάν το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση, τότε και το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση.

Άσκηση 3.8 Λύστε τα παρακάτω συστήματα:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \quad + 2z = 3 \\ 2x + 2y + 3z = 9 \\ x + 2y \quad = 5 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + 5z + 3w = 1 \\ 6x + y + 5z + 4w = -1 \\ 4x - y \quad + w = 3 \\ 5y + 9z + w = 2 \end{array} \right\}$$

Άσκηση 3.9 Εξετάστε για ποιές τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ το παρακάτω σύστημα έχει λύση. Για τις τιμές αυτές λύστε το σύστημα.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 5x + 6y - \lambda z = 1 \\ x + 2y + \lambda z = \lambda \end{array} \right\}$$