Τελική Εξέταση–Θεωρία Πιθανοτήτων
05–06–2024

Πρόβλημα 1. *Έστω* $(X_n)_{n\geq 1}$ *ακολουθία ανεξάρτητων, ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με* $\mathbb{P}(X_n \geq 0) = 1$.
(α) Αν $\mathbb{E}(X_1) < \infty$, *να αποδείξετε ότι σχεδόν βέβαια ισχύει*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0.$$

(β) Αν $\mathbb{E}(X_1) = \infty$, *να αποδείξετε ότι σχεδόν βέβαια ισχύει*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \infty.$$

Πρόβλημα 2. *(α) Έστω* $(X_n)_{n\geq 1}$ *ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών των οποίων η πυκνότητα ισούται με* $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. *Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{1}{n} \max_{k\leq n} X_k \xrightarrow{d} \frac{1}{T}$$

όπου T *είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή, της οποίας να προσδιορίσετε την παράμετρο.*
(β) Έστω $(Z_n)_{n\geq 1}$ *ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την κατανομή* $\mathrm{Poi}(\lambda_n)$, *δηλαδή με πυκνότητα* $f(k;\lambda) = \Pr(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ *και* $\lambda_n = \log_2(n+1) - \log_2 n$. *Θέτουμε* $T_n = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$. *Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{T_n}{\log_2(n+1)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

Πρόβλημα 3. *(α) Αν* X, Y *είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, να βρείτε την σχέση που συνδέει την χαρακτηριστική συνάρτηση του* X, *με την χαρακτηριστική συνάρτηση του* $X - Y$. *Στη συνέχεια, να εξετάσετε αν υπάρχουν* X, Y, *όπως παραπάνω, ώστε η τυχαία μεταβλητή* $X - Y$ *να είναι ομοιόμορφη στο διάστημα* $[-1, 1]$.
(β) Έστω $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *και* ν_∞ *μέτρα πιθανότητας στον* $\left((0,1], \mathcal{B}_{(0,1]}\right)$. *Συμβολίζουμε με* $F_n(t) = \nu_n((0,t])$ *και* $F_\infty(t) = \nu_\infty((0,t])$ *τις αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής. Να αποδείξετε ότι αν* $\nu_n \xrightarrow{w} \nu_\infty$ *τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1]} |F_n(t) - F_\infty(t)| \, dt = 0.$$

Πρόβλημα 4. *Έστω* $(V_n)_{n\geq 1}$ *ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών. Σταθεροποιούμε* $r > 0$ *και* $q \in (0,1]$, *και θεωρούμε* $W_0 = 1$ *και*

$$W_n = (qr + (1-q)V_n)\, W_{n-1},$$

$n = 1, 2, \ldots$.
(α) Να αποδείξετε $n^{-1} \log W_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} w(q)$, *όπου* $w(q) = \mathbf{E} \log(qr + (1-q)V_1)$.
(β) Να αποδείξετε ότι η $w(q)$ *είναι κοίλη στο* $(0,1]$.
(γ) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Jensen να αποδείξετε ότι αν $\mathbf{E}V_1 \leq r$, *τότε* $w(q) \leq w(1)$. *Επιπλέον, να αποδείξετε ότι αν* $\mathbf{E}V_1^{-1} \leq r^{-1}$, *τότε η σχεδόν βέβαια σύγκλιση ισχύει και όταν* $q = 0$ *και μάλιστα ισχύει ότι* $w(q) \leq w(0)$.

Πρόβλημα 5. *Θέτουμε* $R_n = B_1 + \cdots + B_n$, *όπου* B_k *είναι ανεξάρτητες Bernoulli με*

$$\mathbb{P}(B_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(B_k = 0) = k^{-1}.$$

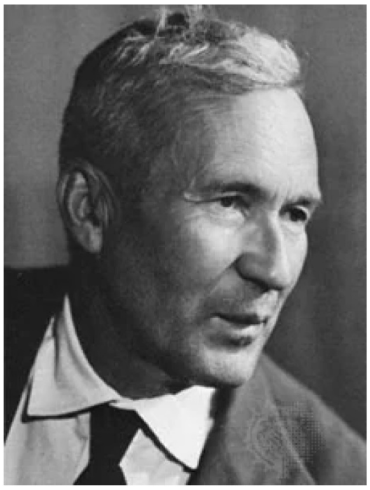
(α) Να αποδείξετε ότι $b_n / \log n \to 1$ *όπου* $b_n = \mathrm{Var}(R_n)$.
(β) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι συνθήκες Lindeberg για τις τυχαίες μεταβλητές $X_{n,k} = (\log n)^{-1/2} \left(B_k - k^{-1}\right)$.
(γ) Να αποδείξετε ότι $(R_n - \log n) / \sqrt{\log n} \xrightarrow{d} G$.

Πρόβλημα 6. *(α) Έστω* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}, Z_\infty$ *τυχαίες μεταβλητές στον χώρο* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Υποθέτουμε ότι* $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z_\infty$. *Έστω* $n_1(\ell), n_2(\ell)$ *δύο ακολουθίες οι οποίες εξαρτώνται από το* $\ell \in \mathbb{N}$, *με* $n_1(\ell), n_2(\ell) \to \infty$ *όταν* $\ell \to \infty$. *Να αποδείξετε ότι*

$$Z_{n_1(\ell)} - Z_{n_2(\ell)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

όταν $\ell \to \infty$.
(β) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ *ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με* $\mathbb{E}(X_1) = 0, \mathbb{E}\left(X_1^2\right) = 1$, *και ορίζουμε* $S_n = \sum_{i\leq n} X_i/\sqrt{n}$. *Το κεντρικό οριακό θεώρημα εξασφαλίζει ότι* $S_n \xrightarrow{d} G \sim \mathcal{N}(0,1)$. *Χρησιμοποιώντας το (α), αν θέλετε, να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τυχαία μεταβλητή* S_∞ *ώστε* $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} S_\infty$.

Πρόβλημα 7. *(α) Με τη βοήθεια των Martingales να αποδείξετε το παρακάτω. Έστω* $(X_n)_{n\geq 1}$ *ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με* $\mathbb{E}(X_k) = 0$ *και* $\mathrm{Var}(X_k) < \infty$ *για κάθε* k. *Να αποδείξετε ότι αν* $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_k) < \infty$ *τότε η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ *συγκλίνει σχεδόν βέβαια.*
(β) Έστω (X_n) *μια ακολουθία μη αρνητικών, ολοκληρώσιμων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, ώστε για κάθε* n *να ισχύει* $\mathbb{E}X_n = 1$. *Έστω* $Y_0 = 1$ *και* $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. *Υποθέτουμε ότι το άπειρο γινόμενο* $\prod_{k=1}^{\infty} E(\sqrt{X_k})$ *υπάρχει και είναι θετικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία* $\sqrt{Y_n}$ *συγκλίνει σχεδόν βέβαια και στον* L^2 *σε μια τυχαία μεταβλητή* Z. *Ισχύει η σύγκλιση της* Y_n *και στον* L^1;



Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 2 μονάδες.
Καλή Επιτυχία!

1 α) Γράφουμε
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}>0\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{X_n}{n}>\frac{1}{r}\text{ για άπειρα } n\right\}\right).$$
Θα εκτιμήσουμε την πιθανότητα καθενός ενδεχομένου που βρίσκεται στην ένωση, με την βοήθεια του λήμματος Borel-Cantelli. Πράγματι, σταθεροποιούμε $r>0$ και τότε, εφόσον $X_n\geq 0$ σχεδόν βέβαια, γράφουμε
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n}>\frac{1}{r}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(rX_1>n\right)\\&\leq\int_0^{\infty}\mathbb{P}\left(rX_1>t\right)dt\\&=r\mathbb{E}\left(X_1\right)\\&<\infty.\end{aligned}$$
Από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι για το τυχόν $r>0$ ισχύει ότι
$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{X_n}{n}>\frac{1}{r}\text{ για άπειρα } n\right\}\right)=0,$$
επομένως από την υποπροσθετικότητα παίρνουμε
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}>0\right)=0.$$
β) Θα εργαστούμε αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli. Γράφουμε
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=\infty\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{K=1}^{\infty}\left\{\frac{X_n}{n}>K\text{ για άπειρα } n\right\}\right).$$
Για το τυχόν $K>0$ ισχύει
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n}>K\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\frac{X_1}{K}>n\right)\\&\geq\int_1^{\infty}\mathbf{P}\left(\frac{X_1}{K}>t\right)dt\\&\geq\mathbb{E}\left(X_1\right)/K-1\\&=\infty,\end{aligned}$$
άρα από το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli έχουμε
$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{X_n}{n}>M\text{ για άπειρα } n\right\}\right)=1.$$
Παίρνοντας τομή από σχεδόν βέβαια ενδεχόμενα, έχουμε σχεδόν βέβαιο ενδεχόμενο, οπότε
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=\infty\right)=1.$$
2 α) Αν θέσουμε $Y_n=\frac{1}{n}\max_{k\leq n}X_k$, τότε
$$\begin{aligned}F_{Y_n}(y)&=P(Y_n\leq y)=P(\max\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}\leq yn)\\&=P(X_1\leq ny,X_2\leq ny,\ldots,X_n\leq ny)=^{\text{ανεξάρτητες}}\\&=P(X_1\leq ny)P(X_2\leq ny)\cdots P(X_n\leq ny)=^{\text{ισόνομες}}\\&=(F_X(yn))^n\end{aligned}$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \lim_{n\to\infty} (F_X(yn))^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(ny)\right)^n = e^{-\frac{1}{y\pi}}\mathbf{1}_{y>0}$$

όπου η τελευταία ισχύει για $y > 0$, εφόσον

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(ny)\right)^n = \left(1 + \frac{-\arctan(1/yn)}{\pi}\right)^n \sim_\infty \left(1 + \frac{-1}{\pi yn}\right)^n \to e^{-1/y\pi},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$.
β) Αρχικά υπολογίζουμε ότι

$$\mathbb{E}T_n = \log_2(n+1) \ \text{ και } \ \sigma_n^2 = \mathrm{Var}(T_n) = \mathbb{E}[T_n] = \sum_{k=1}^{n} l_n = \log_2(n+1),$$

επομένως από την ανισότητα Chebyshev παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{\mathbb{E}[T_n]} - 1\right| \geq \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}[T_n]| \geq \sigma_n^2\epsilon\right) \\ &\leq \frac{1}{(\sigma_n\epsilon)^2} = \frac{1}{\epsilon^2\log_2^2(n+1)} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$ για κάθε $\epsilon > 0$.
Σχόλιο. Από το κριτήριο Kolmogorov, (άσκηση 7)α)) μπορούμε να αποδείξουμε ότι η σύγκλιση είναι σχεδόν βέβαια.

3 α) Οι τυχαίες X και $-Y$ είναι επίσης ανεξάρτητες, άρα

$$\mathbb{E}e^{it(X-Y)} = \mathbb{E}e^{it(X+(-Y))} = Ee^{itX}Ee^{-itY} = Ee^{itX}Ee^{-itX},$$

οπότε

$$\phi_{X-Y}(t) = \phi_X(t)\overline{\phi_X(t)} = |\phi_X(t)|^2,$$

η οποία είναι μη αρνητική για κάθε t. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της ομοιόμορφης στο $[-1,1]$ ισούται με $\frac{\sin t}{t}$, που παίρνει και αρνητικές τιμές, επομένως η $X - Y$ δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη στο $[-1,1]$.
β) Έστω C το σύνολο των σημείων συνέχειας της F_∞. Τότε ξέρουμε ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας, δηλαδή το C^c είναι αριθμήσιμο, δηλαδή έχει μέτρο Lebesque ίσο με 0. Επιπλέον, από το θεώρημα για την ασθενή σύγκλιση, γνωρίζουμε ότι για κάθε $t \in C$ έχουμε $F_n(t) \to F_\infty(t)$. Τέλος, για κάθε t ισχύει $|F_n(t) - F_\infty(t)| \leq 2$, επομένως από το Θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{(0,1]} |F_n(t) - F_\infty(t)|\,dt &= \int_C |F_n(t) - F_\infty(t)|\,dt + \int_{C^c} |F_n(t) - F_\infty(t)|\,dt \\ &\leq \int_C |F_n(t) - F_\infty(t)|\,dt + 2\lambda(C^c) \\ &= \int_C |F_n(t) - F_\infty(t)|\,dt \to 0.\end{aligned}$$

4 α) Επαγωγικά βλέπουμε ότι

$$\log W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

όπου με X_i συμβολίζουμε τις ανεξάρτητες και ισόνομε τυχαίες μεταβλητές $\log(qr + (1-q)V_i)$. Παρατηρούμε ότι κάθε X_i είναι κάτω φραγμένη από $\log(qr) > -\infty$, εφόσον οι V_i είναι μη αρνητικές. Έπεται ότι η μέση τιμή $\mathbb{E}[(X_1)_-]$είναι πεπερασμένη, οπότε από τον νόμο των μεγάλων αριθμών ισχύει ότι

$$n^{-1}\log W_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} w(q),$$

ακόμη και αν το δεξί μέλος είναι άπειρο.

β) Εφόσον η συνάρτηση $q \mapsto (qr + (1-q)V_1(\omega))$ είναι γραμμική και η $\log x$ είναι κοίλη, έπεται ότι η $q \mapsto \log(qr + (1-q)V_1)$ είναι κοίλη στο $(0,1]$, για κάθε $\omega \in \Omega$. Η μέση τιμή (λόγω γραμμικότητας) διατηρεί τα κοίλα της συνάρτησης, οπότε η απεικόνιση $q \mapsto w(q)$ είναι κοίλη στο $(0,1]$.
γ) Από την ανισότητα Jensen για την κοίλη συνάρτηση $g(x) = \log x, x > 0$, παίρνουμε

$$w(q) = \mathbb{E}\log(qr + (1-q)V_1) \leq \log(qr + (1-q)\mathbf{E}V_1).$$

Επομένως αν $\mathbf{E}V_1 \leq r$, τότε $w(q) \leq \log(qr + (1-q)r) = \log r = w(1)$. Στην περίπτωση που $\mathbb{E}V_1^{-1} \leq \frac{1}{r}$, από την ανισότητα $(\log x)_- \leq 1/(ex)$ για κάθε $x \geq 0$, παίρνουμε ότι η

$$\mathbb{E}\left[(\log V_1)_-\right]$$

είναι πεπερασμένη. Επομένως, ο νόμος των μεγάλων αριθμών μπορεί να εφαρμοστεί και όταν $q = 0$, δηλαδή όταν $X_i = \log V_i$. Επιπλέον, εφόσον η $\mathbb{E}\left[(\log V_1)_-\right]$ είναι πεπερασμένη,

$$w(q) = w(0) + \mathbf{E}\log\left(qrV_1^{-1} + 1 - q\right)$$

και από την ανισότητα Jensen παίρνουμε

$$\mathbb{E}\log\left(qrV_1^{-1} + 1 - q\right) \leq \log\left(qr\mathbb{E}V_1^{-1} + 1 - q\right) \leq 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathbb{E}V_1^{-1} \leq r^{-1}$. Αυτό σημαίνει ότι $w(q) \leq w(0)$.

5 α) Από την ανεξαρτησία παίρνουμε

$$b_n = \mathrm{Var}(R_n) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(B_k) = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}\left(1 - k^{-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \sum_{k=1}^{n} k^{-2}.$$

Επιπλέον, εφόσον $\log n = \int_1^n x^{-1}dx$, από την μονοτονία της x^{-1} παίρνουμε ότι

$$\sum_{k=2}^{n} k^{-1} \leq \log n \leq \sum_{k=1}^{n} k^{-1}.$$

Επιπλέον $\sum_k k^{-2} < C$, επομένως $b_n/\log n \to 1$, όπως θέλαμε.
β) Εφόσον $|X_{n,k}| \leq (\log n)^{-1/2}$ για κάθε n, k και για κάθε ω, τότε αν

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left[X_{n,k}^2; |X_{n,k}| \geq \varepsilon\right],$$

έχουμε ότι η $L_n(\varepsilon)$ είναι ίση με μηδέν για $n > \exp\left(\varepsilon^{-2}\right)$, επομένως η συνθήκη του Lindeberg ικανοποιείται. Επιπλέον, οι τυχαίες μεταβλητές $X_{n,k}$ έχουν μέση τιμή 0 και την βοήθεια του ερωτήματος α) συμπεραίνουμε ότι

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_{n,k}^2 = b_n/\log n \to 1$$

καθώς $n \to \infty$.
γ) Από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα παίρνουμε ότι

$$(R_n - \mathbf{E}R_n)/\sqrt{\log n} \xrightarrow{d} G.$$

Η σύγκλιση κατά κατανομή δεν επηρεάζεται αν προσθέσουμε τον όρο

$$(\mathbf{E}R_n - \log n)/\sqrt{\log n} \to 0,$$

ο οποίος δεν περιέχει τυχαίες μεταβλητές.

6 α) Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, από τον ορισμό της σύγκλισης κατά πιθανότητα παίρνουμε

$$\mathbf{P}\left(\left|Z_{n_1(\ell)} - Z_{n_1(\ell)}\right| > \epsilon\right) \le \mathbf{P}\left(\left|Z_{n_1(\ell)} - Z_\infty\right| > \epsilon/2\right) + \mathbf{P}\left(\left|Z_{n_2(\ell)} - Z_\infty\right| > \epsilon/2\right) \to 0.$$

β) Θα εφαρμόσουμε το α) για τις ακολουθίες $2n$ και n. Έχουμε

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{i=1}^{2n} X_i - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=n+1}^{2n} X_j \end{aligned}$$

Εφόσον οι X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, από το κεντρικό οριακό θεώρημα παίρνουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\left(\sum_{i=1}^n X_i/\sqrt{n}, \sum_{j=n+1}^{2n} X_j/\sqrt{n}\right)$ συγκλίνουν στο ζεύγος (G, G'), ανεξάρτητων κανονικών κατανομών. Ειδικότερα,

$$S_{2n} - S_n \xrightarrow{d} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} G + \frac{1}{\sqrt{2}} G' \sim \mathcal{N}(0, 2-\sqrt{2}).$$

Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά $S_{2n} - S_n$ δεν συγκλίνει κατά πιθανότητα στο 0, άρα από το α), η S_n δεν συγκλίνει κατά πιθανότητα.

7 α) Θέτουμε

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right), \quad M_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

και $\mathbb{E}\left(X_k^2\right) = \sigma_k^2$ και ορίζουμε

$$A_n := \sum_{k=1}^n \sigma_k^2.$$

Ξέρουμε ότι η ακολουθία M_n είναι martingale. Επιπλέον,

$$\mathbb{E}\left[(M_k - M_{k-1})^2\right] = \mathbb{E}\left(X_k^2\right) = \sigma_k^2,$$

οπότε

$$\mathbb{E}\left(M_n^2\right) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 = A_n$$

Αν $\sum \sigma_k^2 < \infty$, τότε η ακολουθία M_n είναι φραγμένη στον $\mathcal{L}^2$, επομένως το όριο $\lim M_n$ υπάρχει σ.β.
β) Θέτουμε $a_n := \mathbb{E}(\sqrt{X_n})$ και

$$M_n := \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{X_k}}{a_k}.$$

Τότε η ακολουθία $\{M_n\}$ είναι ένα μη αρνητικό martingale (εξηγήστε). Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n \frac{X_k}{a_k^2}\right) = \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^2} \le \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^\infty a_k\right)^2} < \infty,$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathbb{E}(Y_n) = 1$ και $a_k \le 1$ από την ανισότητα Jensen. Συνεπώς, από το Θεώρημα για την L^2-martingale σύγκλιση παίρνουμε ότι $M_n \to M_\infty$ και σχεδόν βέβαια στον L^2. Εφόσον $Y_n = \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^2 M_n^2$, έπεται ότι η $\{Y_n\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, επομένως Y_n συγκλίνει στον L^1.