Θεωρία Πιθανοτήτων-Μεταπτυχιακό

4º Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. *Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι χαρακτηριστικές συναρτήσεις κάποιας κατανομής.*

$$\cos t, \frac{(1+e^{it})^2}{4}, (2-e^{it})^{-1}.$$

Άσκηση 2. *Θεωρούμε τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές* $X_1, \ldots, X_n$ *που ακολουθούν κατανομή Cauchy με πυκνότητα* $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. *Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς* $a_1, \ldots, a_n$, *το άθροισμα* $\sum_{j=1}^n a_j X_j$ *έχει την ίδια κατανομή με την τυχαία μεταβλητή* $\left(\sum_{j=1}^n |a_j|\right) X_1$.

Άσκηση 3.
α) Αν η τυχαία μεταβλητή X *είναι ολοκληρώσιμη, να αποδείξετε ότι*

$$\mathbb{E}|X| = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\mathrm{Re}\phi_X(t)}{t^2}dt.$$

β) Αν οι τυχαίες μεταβλητές X, Y *είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και ολοκληρώσιμες, να αποδείξετε ότι*

$$\mathbb{E}|X-Y| \leq \mathbb{E}|X+Y|.$$

Άσκηση 4. *Έστω* $X_{n,k}$ *με* $n \geq 1$ *και* $1 \leq k \leq n$ *μια τριγωνική διάταξη τυχαίων μεταβλητών Bernoulli. Υποθέτουμε ότι για κάθε* $n \geq 1$ *οι τυχαίες μεταβλητές* $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ *είναι ανεξάρτητες και ικανοποιούνται οι παρακάτω δύο συνθήκες:*
(ι) $\mathbb{E}\sum_{k=1}^n X_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$ *για κάποιο* $\lambda \in (0,\infty)$,
(ιι) $\max_{1\leq k\leq n} \mathbb{E}X_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Να αποδείξετε ότι

$$X_{n,1} + \cdots + X_{n,n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z,$$

όπου Z *είναι Poisson τ.μ. με παράμετρο* λ.

Άσκηση 5. *Οι τυχαίες μεταβλητές* $X_1, X_2, \ldots$ *είναι ισόνομες και ανεξάρτητες και έχουμε μέση τιμή* 0 *και διακύμανση ίση με* 1. *Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{\sqrt{n}\,(X_1 + \cdots + X_n)}{X_1^2 + \cdots + X_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$$

και

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z,$$

όπου Z *είναι η κανονική κατανομή.*

Άσκηση 6. *Οι τυχαίες μεταβλητές* $X_1, X_2, \ldots$ *είναι ισόνομες και ανεξάρτητες και έχουμε μέση τιμή* 0 *και διακύμανση ίση με* σ^2. *Υποθέτουμε ότι για το άθροισμα* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ *γνωρίζουμε ότι*

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right) \to \frac{1}{3}$$

όταν $n \to \infty$. *Να βρείτε το* σ^2.

Άσκηση 7. *Οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές* $X_1, X_2, \ldots$ *ικανοποιούν*

$$\mathbb{P}\left(X_k = \frac{\sqrt{15}}{4^k}\right) = \mathbb{P}\left(X_k = -\frac{\sqrt{15}}{4^k}\right) = \frac{1}{2}.$$

Να αποδείξετε ότι δεν ικανοποιούν το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Άσκηση 8. *Οι τ.μ.* X, Y *είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με πεπερασμένη μέση τιμή. Να αποδείξετε ότι*

$$\mathbb{E}(X \mid X + Y) = \frac{X + Y}{2}.$$

Άσκηση 9. *Οι τυχαίες μεταβλητές* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *είναι ανεξάρτητες, έχουν μέση τιμή* 0 *και* $\mathrm{Var}(\xi_m) = \sigma_m^2 < \infty$. *Αν*

$$s_n^2 = \sum_{m=1}^{n} \sigma_m^2,$$

να αποδείξετε ότι η $S_n^2 - s_n^2$ *είναι martingale, όπου* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Άσκηση 10. *Έστω* $C \in \mathbb{R}$ *και* Z_i *μια συλλογή από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με*

$$\mathbb{P}(Z_i = -1) = 3/4 \quad \text{και} \quad \mathbb{P}(Z_i = C) = 1/4.$$

Έστω $X_0 = 5$ *και* $X_n = 5 + Z_1 + \ldots + Z_n$.
α) Να βρείτε την τιμή του C *ώστε η* X_n *να είναι martingale.*
β) Για αυτή την τιμή του C *να εξέτασετε αν η* X_n *συγκλίνει σε τυχαία μεταβλητή σχεδόν βέβαια.*
γ) Για αυτή την τιμή του C *να εξέτασετε αν το ενδεχόμενο* $\{X_n = 0 \text{ για κάποιο } n\}$ *συμβαίνει με πιθανότητα 1.*