Ασκήσεις / Φυλλάδιο 1ο

(1) Ποιό είναι το ριζικό του $A = \langle 10 \rangle$ στο $\mathbb{Z}$;

(2) Να υπολογίσετε το άθροισμα, το γινόμενο, την τομή και το πηλίκο των παρακάτω ιδεωδών

(i) $A = 6\mathbb{Z}$, $B = 8\mathbb{Z}$

(ii) $A = 5\mathbb{Z}$, $B = 7\mathbb{Z}$

Μπορείτε να εξάγετε έναν γενικό κανόνα;

(3) R δακτύλιος και $A \trianglelefteq R$, $B \trianglelefteq R$

Να αποδείξετε ότι

(i) $Rad(A) \supseteq A$

(ii) $Rad(Rad A) = Rad(A)$

(iii) $Rad(A \cdot B) = Rad(A \cap B) = Rad(A) \cap Rad(B)$

(iv) $Rad(A) = \langle 1 \rangle = R \Leftrightarrow A = R$

(v) $Rad(A+B) = Rad(Rad(A) + Rad(B))$

(vi) Αν P πρώτο ιδεώδες τότε $Rad(P^n) = P \quad \forall n > 0$

(4) Αν $A, B \trianglelefteq R$ και $f : R \to S$ ομομ. δακτ. Να αποδ. ότι

(i) $(A+B)^e = A^e + B^e$

(ii) $(A \cdot B)^e = A^e \cdot B^e$

(iii) $A \subseteq A^{ec} =: (A^e)^c$

(iv) $A^e \subseteq A^{ece}$

(5) Αν $C, D \trianglelefteq S$ και $f : R \to S$ ομομ. δακτ

να αποδείξετε ότι

(i) $(C \cap D)^c = C^c \cap D^c$

(ii) $(Rad C)^c = Rad(C^c)$

(iii) $C^{ce} \subseteq C$

(iv) $C^c \subseteq C^{cec}$

(5) Αν $A = 2\mathbb{Z}$ και $\varphi: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ (εμφύτευση)
Ποιά είναι η επέκταση του A, A^e
Τι παρατηρείτε;

(6) Αν $\varphi: R \to S$ ομομορφ. δακτυλίων
και $B \trianglelefteq S$, B πρώτο ιδεώδες
Να αποδείξετε ότι και η συστολή του
B^c είναι επίσης πρώτο ιδεώδες του R

(7) Έστω $\varphi: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}[X,Y]$ η (κανονική) εμφύτευση
Έστω $B = \langle X, Y \rangle$. Να αποδείξετε ότι
το B είναι maximal του $\mathbb{Q}[X,Y]$. Να αποδ.
ότι η συστολή του είναι $B^c = \langle 0 \rangle$.
Είναι το ιδεώδες B^c maximal του $\mathbb{Z}$;

(8) Έστω R δακτύλιος για τον οποίο για κάθε
στοιχείο x, ισχύει $x^n = x$, για κάθε $n > 1$
(το n εξαρτάται κάθε φορά από το x)
Να αποδείξετε ότι κάθε πρώτο ιδ. του R είναι maximal.

(9) Έστω A ιδεώδες του R $(A \neq R)$
Να αποδείξετε ότι $A = Rad(A)$
$\Leftrightarrow$ το A είναι τομή πρώτων ιδεωδών.

(10) Έστω R δακτύλιος και $N = Nilradical(R)$
(Nilradical το ιδεώδες όλων των nilpotent
(μηδενοδ) στοιχείων του R ή αλλιώς $N = Rad(\langle 0 \rangle)$)
Να αποδείξετε ότι οι ακόλουθες
προτάσεις είναι μεταξύ τους ισοδύναμες
1) Ο R έχει ακριβώς ένα πρώτο ιδεώδες
2) Κάθε στοιχείο του R είναι ή μονάδα
ή μηδενοδύναμο.
3) Ο R/N είναι σώμα
(Αν χρειαστεί: ο R/N δεν έχει μηδενοδ. στοιχ. $\neq 0$)