24/4/24

Άσκ. 2

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^3+\dots+x_n^3}{x_1+\dots+x_n}\, dx_1\dots dx_n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\, \frac{X_1^3+\dots+X_n^3}{X_1+\dots+X_n}$$, $X_1,\dots,X_n$ είναι ομ. στο $[0,1]$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\, \frac{\frac{X_1^3+\dots+X_n^3}{n}}{\frac{X_1+\dots+X_n}{n}} \overset{\text{κυρ.}}{\underset{\text{σύγκλιση}}{=}} \mathbb{E} \lim \frac{(X_1^3+\dots+X_n^3)/n}{(X_1+\dots+X_n)/n} \quad (*)$$

$$\frac{X_1^3+\dots+X_n^3}{n} \xrightarrow{\sigma.\beta} \mathbb{E}X_1^3 = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow{\sigma.\beta} \mathbb{E}X_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$(*)\ \left|\frac{X_1^3+\dots+X_n^3}{X_1+\dots+X_n}\right| \le \frac{X_1+\dots+X_n}{X_1+\dots+X_n} = 1.$$

άρα εφαρμόζω κυριαρχημένη

και ο λόγος $\to \frac{1}{2}$.

Άσκ. 3

$X_1,\dots,X_n$ έχουν πυκνότητα g. Νδο $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(X_i)}{g(X_i)} \to \int_{\mathbb{R}} f$
ανεξ.

Από Etemadi αρ. μέσος $\xrightarrow[\sigma.\beta]{}$ $\mathbb{E}\,\frac{f(X_1)}{g(X_1)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{g(x)}\, g(x)\,dx =$

$$= \int_{\mathbb{R}} f.$$

Άσκ. 6

$X_1,\dots,X_n$ ανεξ. ομοιόμορφα στο $[-1,1]$. Νδο η κατανομή του nM_n συγκλίνει. ($M_n = \min\{X_1,\dots,X_n\}$)

$$\mathbb{P}(nM_n \le t) = 1-\mathbb{P}(nM_n > t) = 1-\mathbb{P}\left(M_n > \frac{t}{n}\right) =$$

$$= 1-\mathbb{P}\left(X_1 > \frac{t}{n}\right)^n = 1-\left(\frac{1-\frac{t}{n}}{2}\right)^n \text{ αν } n>t \longrightarrow \left(\frac{e^{-t}}{\infty}\right) \to 0$$

Αρχικά 1-0→1. Σκέψη

Ασκ.7

$X_1, \dots X_n$ ανεξ. κανονικές. Νδο η $\frac{M_n}{\sqrt{2\log n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$

όπου $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

Λύση

Πρέπει νδο $\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}\left(\left| \frac{M_n}{\sqrt{2\log n}} - 1 \right| > \varepsilon \right) \to 0$

$$\mathbb{P}(M_n > \underbrace{(1+\varepsilon)\sqrt{2\log n}}_{a(n)}) + \boxed{\mathbb{P}(M_n < (1-\varepsilon)\sqrt{2\log n})}$$

για αυτό ομοίως θα χρειαστώ αυτό που είχαμε δείξει με την σύγκριση

Γενικά $\mathbb{P}(M_n \leq x) = (\mathbb{P}(X_1 \leq x))^n$

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

Ισχύει (το είχαμε δείξει) $\left(\int_x^\infty e^{-t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt \right) \cdot x e^{-x^2/2} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\mathbb{P}(M_n > a(n)) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = n\,\mathbb{P}(A_1) =$$

$$= n\,\mathbb{P}(X_1 > (1+\varepsilon)\sqrt{2\log n}) =$$

$$= n \int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\log n}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt =$$

$$< n\, e^{-\frac{((1+\varepsilon)\sqrt{2\log n})^2}{2}}$$

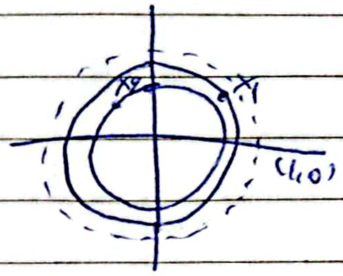
$$= \frac{n}{n^{(1+\varepsilon)^2}} \to 0.$$

Ασκ.9

$X_0 = (1,0)$. Το X_n ορίζεται ως

$\frac{X_{n+1}}{\|X_n\|_2}$ Επιλ. ομ. από την $B(0,1)$ ανεξ. ως προς $X_1, \dots, X_n$

$\frac{\log \|X_n\|_2}{n} \xrightarrow{\sigma.\beta.} c$



$$\frac{\log \|X_n\|_2}{n} = \frac{\log \overbrace{\frac{\|X_n\|_2}{\|X_{n-1}\|_2}}^{Y_n} \frac{\|X_{n-1}\|_2}{\|X_{n-2}\|_2} \cdots \frac{\|X_1\|_2}{\|X_0\|_2}}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \log Y_i}{n} \xrightarrow[\sigma.\beta]{N.M.A} c$$

$$c = \mathbb{E} \log Y_1$$

$$\mathbb{E} \log Y_1 = \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} \log \|x\|_2 \, dx =$$

πολικές

$$= \frac{1}{|B(0,1)|} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underset{\text{Ιακωβιανή}}{r} \log \|r\theta\|_2 \, d\theta \, dr \qquad \|\theta\|_2 = 1$$

$$= 2 \int_0^1 r \log r \, dr = \ldots$$ κατά παράγοντες