22/4/24

$X_1, \dots$ ανεξ. τ.μ. με $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}X_i^2 = 1$, $\mathbb{E}|X_i|^3 < \infty$ και έστω φ φραγμένη και Lipschitz. Έστω $Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$. Τότε $|\mathbb{E}\varphi(Z_n) - \mathbb{E}\varphi(G)| \leq$

$$\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \mathbb{E}|X_1|^3 \left(1 + \sup_{\mathbb{R}} |\varphi'(x)|\right)$$

Απόδ.

Βήμα 1 Βρίσκω f ώστε $\boxed{\varphi(x) - \mathbb{E}\varphi(G) = f'(x) - xf(x)}$

$$\left.\begin{array}{l} |xf(x)| \leq .. \\ |f(x)| \leq .. \end{array}\right\} \quad |f'(x)| \leq ..$$

Βήμα 2 $\mathbb{E}\varphi(Z_n) - \mathbb{E}\varphi(G) = \mathbb{E}[f'(Z_n) - Z_n f(Z_n)]$

$$Z_n = Z_{n,i} + \frac{X_i}{\sqrt{n}}$$

Βήμα 3 $\mathbb{E}\varphi(Z_n) - \mathbb{E}\varphi(G) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E}f'(Z_n) - \mathbb{E}\left(X_i^2 \int_0^1 f'(Z_{n,i} + \frac{t}{\sqrt{n}} X_i) dt \right) \right)$ (*)

Παρατηρούμε ότι $\underline{\mathbb{E}f'(Z_{n,i}) X_i^2} \overset{\text{ανεξ.}}{=\!=} \mathbb{E}f'(Z_{n,i}) \mathbb{E}X_i^2 = \underline{\mathbb{E}f'(Z_{n,i})}$

Τότε (*) $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E}(f'(Z_n) - f'(Z_{n,i})) - \mathbb{E}X_i^2 \int_0^1 (f'(Z_{n,i} + \frac{t}{\sqrt{n}} X_i) - f'(Z_{n,i})) dt \right)$

Η f' έχει Lipschitz σταθερά που φράσσεται από CA

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} CA\, \mathbb{E}\left|\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right| + \mathbb{E}X_i^2 \int_0^1 CA \frac{t}{\sqrt{n}} |X_i| dt$$

$$\leq \frac{1}{n} \left(\sqrt{n}\, CA\, \mathbb{E}|X_1| + \sqrt{n} \frac{CA}{2} \mathbb{E}|X_1|^3 \right)$$

Hölder $\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(CA\, \mathbb{E}|X_1|^3 + \frac{CA}{2} \mathbb{E}|X_1|^3 \right) =$

$$= \frac{c'}{\sqrt{n}} \mathbb{E}|X_1|^3 A$$

Δεσμευμένη μέση τιμή

$$\boxed{\mathbb{P}(A|G) = \frac{\mathbb{P}(A\cap G)}{\mathbb{P}(G)}}$$

Πώς μοιάζει η δεσμευμένη μέση τιμή?

$\mathbb{E}(X|G) = \frac{1}{\mathbb{P}(G)}\int_G X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)$. Όμως όταν $\mathbb{P}(G)=0$?

Ορισμός: Έστω $(X, \Omega, \mathcal{F})$ ένας χώρος πιθανότητας και $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ σ-άλγ.
Ορίζουμε την δεσμευμένη μέση τιμή, $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ ως μια τ.μ. Y για την οποία ισχύουν:

(i) η Y είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

(ii) για κάθε ενδεχόμενο $G\in\mathcal{G}$ ισχύει $\int_G Y = \int_G X$.

Παράδειγμα

Έστω G ένα ενδεχόμενο με $\mathbb{P}(G)>0$ και έστω $\mathcal{G}=\sigma(G)=\{\emptyset, G, G^c, \Omega\}$.
Τότε, η τ.μ. Y που ορίζεται ως $Y(\omega)=\begin{cases}\mathbb{E}(X|G) & \text{αν } \omega\in G\\ \mathbb{E}(X|G^c) & \text{αν } \omega\notin G\end{cases}$

ικανοποιεί τα (i) και (ii), δηλ. $Y(\omega)=\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

(i) η Y είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη. (δηλ. θέλω $\{\omega : Y(\omega)\in B\}$ να περιέχεται στην $\mathcal{G}$).

(ii) $\int_G Y = \int_G X$?

$$\int_G Y = \int_G \mathbb{E}(X|G) = \mathbb{E}(X|G)\,\mathbb{P}(G) = \int_G X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)$$

Ομοίως $\int_{G^c} Y = \int_{G^c} X$.

Θεώρημα: Αν $\mathbb{E}|X|<\infty$, τότε υπάρχει μοναδική τ.μ. Y ώστε να ισχύουν τα (i) και (ii)

Απόδ.

Μοναδικότητα

Έστω ότι υπάρχουν Y, Y' που ικανοποιούν τα (i), (ii)

Τότε $\int_G Y = \int_G Y' \Rightarrow \int_G Y - Y' = 0$. Επιλέγω $G = \{Y - Y' > \frac{1}{n}\} \in \mathcal{G}$

τότε $\frac{1}{n} \mathbb{P}(Y - Y' > \frac{1}{n}) \leq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(Y - Y' > \frac{1}{n}) = 0$ (ισχύει για κάθε n)

Από την ένωση ενδεχομένων $\mathbb{P}(Y - Y' > 0) = 0$. Ομοίως $\mathbb{P}(Y' - Y > 0) = 0$

Άρα $\mathbb{P}(Y \neq Y') = 0$

Άρα είναι ίσα σ.β.

Ύπαρξη (1η απόδειξη)

Έστω $X \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, δηλ. $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$. Θεωρώ τον υπόχωρο $H = L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$

Ο H είναι κλειστός, άρα ο H είναι πλήρης (κλειστός μέσα σε πλήρη - είναι ο L_2).

Ξέρουμε ότι $\exists\, Y \in H$ ώστε $\mathbb{E}(X-Y)^2 = \inf_{W \in H} \{\mathbb{E}(X - W)^2\}$

Στον L_2 έχουμε εσωτερικό γινόμενο, οπότε επιπλέον, ισχύει ότι $X - Y \perp H$, δηλ. $\forall\, W \in H$ $\mathbb{E}(X-Y)W = 0$

Αν πάρω $W = \mathbb{1}_G \in H$ (όπου $G \in \mathcal{G}$ τυχόν), θα έχω $\mathbb{E}(X-Y)\mathbb{1}_G = 0$ δηλ. παίρνω την (ii)

Βασικές ιδιότητες στον L_2

1) Γραμμικότητα: Αν $X, Y \in L_2$ και $a, b \in \mathbb{R}$ τότε $\mathbb{E}(aX + bY | \mathcal{G}) =$
$= a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$

(i) Το δεξί μέλος είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμο ως άθροισμα $\mathcal{G}$-μετρήσιμων

(ii) Αν $G \in \mathcal{G}$ $\int_G a\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) =$

$$= a\int_G \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\int_G \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) = a\int_G X + b\int_G Y =$$

$$= \int_G aX + bY.$$

2) Αν $X, Y \in L_2$ και $X \leq Y$ σ.π., τότε $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ σ.π.

Απόδ

έστω $G \in \mathcal{G}$ $\int_G \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \overset{ορσ}{=} \int_G X \leq \int_G Y \overset{ορσ}{=} \int_G \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$

Όπως και πριν .. η μία είναι μικρότερη ή ίση από την άλλη σ.π!

$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ σ.π.

Έστω $X \in L_1$ και ορίζουμε μια ακολ. τ.μ. $X_n = \min\{X, n\}$. Τότε $X_n \in L_2$ και X_n αύξουσα και $X_n \uparrow X$. Από το αποτέλεσμα στον L_2 υπάρχουν οι τ.μ. $Y_n = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})$ και από τη μονοτονία η Y_n είναι επίσης αύξουσα (και φραγμένη), οπότε υπάρχει το $Y = \lim Y_n$. Θα δείξουμε ότι η Y ικανοποιεί τα (i) και (ii)

$\downarrow$

όριο μετρήσιμων

Για το (ii)

Έστω $G \in \mathcal{G}$. Τότε $\int_G Y = \int_G \lim_n Y_n \overset{μον. συγκ.}{=} \lim_n \int_G Y_n \overset{ορσ.}{=}$

$= \lim_n \int_G X_n \overset{μον. συγκλ.}{=} \int_G \lim X_n = \int_G X$.