ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Θ. Γαρεφαλάκης - Μ. Ταρουδάκης

# ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

## Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Στο εργαστήριο να γίνουν τουλάχιστον οι ασκήσεις 1-7, 10, 12, 13 και όσες άλλες προλάβετε. Οι υπόλοιπες είναι για εξάσκηση στο σπίτι (φυσικά αν υπάρχουν απορίες ευχαρίστως να τις συζητήσουμε).

**Άσκηση 2.1** Βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων **χωρίς** να χρησιμοποιήσετε την διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 2.2** Εξετάστε αν οι παρακάτω πίνακες έχουν αντίστροφο και αν ναι υπολογίστε τον.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 2.3** Αν $A$ ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ της προηγούμενης άσκησης, λύστε το σύστημα $AX = b$ όπου $b = (1, 2, 3, 4)^t$ κάνοντας χρήση του αντιστρόφου $A^{-1}$ που βρήκατε από την 2 άσκηση.

**Άσκηση 2.4** Δίνεται ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τις σταθερές $a, b$, ώστε

a. να είναι αντιστρέψιμος

b. να είναι συμμετρικός.

**Άσκηση 2.5** Σωστό ή Λάθος (δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας)

a. Ο πίνακας $A$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο $A^t$ είναι αντιστρέψιμος.

b. Αν ο τετραγωνικός πίνακας $A$ έχει μία μηδενική γραμμή τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.

c. Αν ο τετραγωνικός πίνακας $A$ έχει μία μηδενική στήλη τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.

d. Αν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος και $AB = 0$ τότε $B = 0$. (συγκρίνετε αυτή την άσκηση με την άσκηση 5 d) του πρώτου φυλλαδίου).

e. Αν $A$, $B$ αντιστρέψιμοι τότε $(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1}$.

f. Ένας διαγώνιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία στην διαγώνιό του είναι μη μηδενικά.

**Άσκηση 2.6** Εαν $A$ και $B$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, δείξτε ότι ο $I - BA$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο $I - AB$ είναι αντιστρέψιμος.
*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $B(I - AB) = (I - BA)B$.

**Άσκηση 2.7** Έστω $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, τέτοιος ώστε $A^k = 0$ για κάποιο $k \geq 1$. Δείξτε ότι ο $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

**Άσκηση 2.8** Δείξτε ότι

a. Μπορεί το γινόμενο δύο πινάκων $A \cdot B$ να είναι αντιστρέψιμος χωρίς κανένας από τους δύο, $A$ και $B$, να είναι αντιστρέψιμος. (Εδώ, οι πίνακες $A, B$ δεν είναι τετραγωνικοί.)

b. Αν όμως A, B είναι τετραγωνικοί και $A \cdot B$ είναι αντιστρέψιμος και ο $A$ είναι αντιστρέψιμος τότε και ο $B$ είναι αντιστρέψιμος.

**Άσκηση 2.9** Αν $A$ είναι $n \times n$ πίνακας ώστε $A^t A = 0$, δείξτε ότι $A = 0$.

**Άσκηση 2.10** Έστω $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, όπου ο $B$ είναι συμμετρικός. Δείξτε ότι $(A^{-1}B)^t A^t B^{-1} = I$.

**Άσκηση 2.11** Αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, δείξτε ότι $A^3 = 5I_3$. Είναι ο $A$ αντιστρέψιμος; Αν ναι ποιός είναι ο αντίστροφός του;

**Άσκηση 2.12** Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{R})$.

a. Δείξτε ότι η $i$-στή γραμμή του πίνακα $AB$ είναι ίση με τον γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του $B$ με συντελεστές τις εγγραφές της $i$-στής γραμμής του $A$.

b. Δείξτε ότι η $j$-στή στήλη του πίνακα $AB$ είναι ίση με τον γραμμικό συνδυασμό των στηλών του $A$ με συντελεστές τις εγγραφές της $j$-στής στήλης του $B$.

**Άσκηση 2.13** Χρησιμοποιώντας το Ερώτημα a της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι:

a. ο εξ' αριστερών πολλαπλασιασμός ενός πίνακα $A$ με τον $E_{i,j}(\lambda)$ αντιστοιχεί στην πράξη γραμμών $r_i \leftarrow r_i + \lambda r_j$,

b. ο εξ' αριστερών πολλαπλασιασμός ενός πίνακα $A$ με τον $D_j(\lambda)$ αντιστοιχεί στην πράξη γραμμών $r_j \leftarrow \lambda \cdot r_j$ και

c. ο εξ' αριστερών πολλαπλασιασμός ενός πίνακα $A$ με τον $P_{i,j}$ αντιστοιχεί στην πράξη γραμμών $r_j \leftrightarrow r_i$.

**Άσκηση 2.14** Δώστε παραδείγματα πινάκων $A$ και $B$ τέτοιων ώστε

a. $A + B$ δεν είναι αντιστρέψιμος, αλλά $A$ και $B$ είναι.

b. $A + B$ είναι αντιστρέψιμος, αλλά $A$ και $B$ δεν είναι.

c. και οι τρείς πίνακες $A$, $B$, $A + B$ είναι αντιστρέψιμοι.