3^{η} Εργασία–Θεωρία Πιθανοτήτων

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τις ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές* $X_1, X_2, \ldots$ *με παράμετρο* λ. *Να αποδείξετε ότι οι*
α) $Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{X_1^2+\cdots+X_n^2}$ *και*
β) $Z_n = \frac{X_1X_2+X_2X_3+\cdots+X_nX_{n+1}}{n}$
συγκλίνουν σχεδόν βέβαια και να βρείτε τα όριά τους.

Άσκηση 2. *Να υπολογίσετε το όριο*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^3+\ldots+x_n^3}{x_1+\ldots+x_n}\, dx_1 \ldots dx_n$$

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές* $X_1, X_2, \ldots$ *με θετική πυκνότητα* g. *Να αποδείξετε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση* f *με* $\int_{\mathbb{R}} |f| < \infty$, *ισχύει ότι*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(X_i)}{g(X_i)} \to \int_{\mathbb{R}} f$$

σχεδόν βέβαια.

Άσκηση 4. *Θεωρούμε ακολουθία* $(X_i)_0^\infty$ *ανεξάρτητων ομοιόμορφων τυχαίων μεταβλητών στο* $[0,1]$. *Να αποδείξετε ότι η τυχαία μεταβλητή* $Y_n = X_1X_2 \cdots X_n$ *συγκλίνει σχεδόν βέβαια και να βρείτε το όριό της.*

Άσκηση 5. *Αν* $X_1, X_2, \ldots$ *είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο* $[-1,1]$, *να εξετάσετε αν η ακολουθία*

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2^2 + \ldots + X_n^n}{n}$$

συγκλίνει σχεδόν βέβαια.

Άσκηση 6. *Αν* $X_1, X_2, \ldots$ *είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο* $[-1,1]$. *Αν* $M_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ *να αποδείξετε ότι η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών* nM_n *συγκλίνει κατά κατανομή και να βρείτε την οριακή κατανομή.*

Άσκηση 7. *Θεωρούμε τις ανεξάρτητες Κανονικές τυχαίες μεταβλητές* $N(0,1)$ *και έστω* $M_n = \max\{X_k; 1 \leqslant k \leqslant n\}$. *Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{M_n}{\sqrt{2\log n}} \to 1$$

κατά πιθανότητα.

Άσκηση 8. *Θεωρούμε τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές* $X_1, X_2, \ldots$ *με*

$$\mathbb{P}(X_i = (-1)^k k) = \frac{C}{k^2 \log k}$$

για $k \geq 2$ *και η σταθερά* C *είναι τέτοια ώστε το άθροισμα των πιθανοτήτων να ισούται με 1. Να αποδείξετε ότι* $\mathbb{E}|X_i| = \infty$, *αλλά υπάρχει πεπερασμένη σταθερά* μ, *ώστε* $\frac{S_n}{n} \to \mu$ *κατά πιθανότητα.*

Άσκηση 9. *Έστω* $X_0 = (1,0)$ *και ορίζουμε το τυχαίο σημείο* $X_n \in \mathbb{R}^2$ *επαγωγικά ως εξής: Το* $\frac{X_{n+1}}{\|X_n\|_2}$ *επιλέγεται τυχαία και ομοιόμορφα από την μπάλα ακτίνας 1 και είναι ανεξάρτητο ως προς τα* $X_1, \ldots, X_n$. *Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{\log \|X_n\|_2}{n} \to c$$

σχεδόν βέβαια και υπολογίστε την σταθερά c.