2^{η} Εργασία–Θεωρία Πιθανοτήτων

Άσκηση 1. *Αν για την μη αρνητική τυχαία μεταβλητή* X *ισχύει ότι* $\mathbb{E}X < \infty$, *να αποδείξετε ότι*

$$\lim_{t \to +\infty} t\mathbb{P}(X > t) = 0.$$

Άσκηση 2. *Θεωρούμε μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή* X *και* $\theta \in [0,1]$. *Να αποδείξετε ότι*

$$\mathbb{P}(X > \theta\mathbb{E}X) \geq (1-\theta)^2 \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2}.$$

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τα τυχαία πρόσημα* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, *δηλαδή*

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{2}$$

για κάθε $1 \leq i \leq n$. *Να αποδείξετε ότι υπάρχει θετική σταθερά* c, *ώστε για κάθε* $n \geq 1$ *και πραγματικούς αριθμούς* $a_1, \ldots, a_n$ *ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i \right| > \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \right) \geq c.$$

Άσκηση 4. *Αν* X *είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή* m *και διακύμανση* v, *να αποδείξετε ότι για κάθε* $a > 0$ *ισχύει*

$$\mathbb{P}(X - m \geqslant a) \leqslant \frac{v}{v + a^2}.$$

Άσκηση 5. *Θεωρούμε ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών* $(X_n)_{n \geq 1}$. *Για κάθε* $k \geqslant 1$ *η* X_k *έχει πυκνότητα* $f(t) = \frac{1}{2}\exp(-|t|)$ *Να αποδείξετε ότι η σειρά*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k^2}$$

συγκλίνει σχεδόν βέβαια.
Υπόδειξη: Βρείτε κατάλληλη συνάρτηση f *ώστε να υπολογίσετε την* $\mathbb{P}(|X_k| \geq f(k))$ *για κάθε* $k \geq 1$.

Άσκηση 6. *Θεωρούμε τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές* $X_1, X_2, \ldots$ *με*

$$\mathbb{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2} \qquad \textit{και} \qquad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. *Αν* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, *να αποδείξετε ότι* $S_n \longrightarrow -\infty$ *σχεδόν βεβαίως.*

Άσκηση 7. *Θεωρούμε τα διανύσματα* $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ *με* $\|v_i\|_2 \leqslant 1$. *Έστω* $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$ *και θέτουμε* $w = p_1 v_1 + \ldots + p_n v_n$. *Να αποδείξετε ότι υπάρχουν* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$ *ώστε αν* $v = \varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_n v_n$, *τότε*

$$2\|w - v\|_2 \leqslant \sqrt{n}.$$

Άσκηση 8. *Αν οι τυχαίες μεταβλητές* X *και* Y *είναι ανεξάρτητες, έχουν μέση τιμή 0, να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο* k *ισχύει*

$$\mathbb{E}_{X,Y}|X + Y|^k \geq \max\{\mathbb{E}|X|^k, \mathbb{E}|Y|^k\}.$$

Άσκηση 9. *Οι τυχαίες μεταβλητές* $X_1, \ldots, X_n$ *είναι ανεξάρτητες ομοιόμορφες στο διάστημα* $[0,2]$. *Ορίζουμε* $X_{(n)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$. *Να αποδείξετε ότι η* $X_{(n)}$ *συγκλίνει κατά πιθανότητα στο 2. Συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στο 2;*