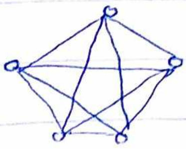
06/03/2024

Εφαρμογή στη Θεωρία γραφημάτων

K_n: πλήρες γράφημα με n-κορυφές (π.χ)



Χρωματίζουμε τις ακμές με δύο χρώματα.
Τότε υπάρχει χρωματισμός με το πολύ $\frac{1}{4}\binom{n}{3}$ μονοχρωματικά τρίγωνα.

Απόδειξη:

Χρωματίζουμε κάθε ακμή με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ κόκκινη και $\frac{1}{2}$ μπλε.

Αν uvw: τρίγωνο η πιθανότητα να είναι μονοχρωματικό είναι $1/4$

Έστω X: η τυχαία μεταβλητή, που δίνει το πλήθος των μονοχρωματικών τριγώνων

$$X = \sum x_i$$

όπου $x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το } i \text{ τρίγωνο είναι μονοχρωματικό} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Τότε $\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} \mathbb{E}X_i \underset{\text{Bernoulli}}{=} \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\binom{n}{3} \Rightarrow \exists$ χρωματισμός με το πολύ $\frac{1}{4}\binom{n}{3}$ μονοχρωματικά τρίγωνα

Θεώρημα (Van der Waarden):

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Χρωματίζουμε τους $1, 2, \dots, N$ με δύο χρώματα. Αν $N > 2^{k/2}$, τότε μπορώ να βρω μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο μήκους k.

Απόδειξη:

Έστω $N \leq 2^{k/2}$ (1)

Αν S είναι μια αριθμητική πρόοδος μήκους k, τότε ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $X_S = \begin{cases} 1, & \text{αν η } S \text{ είναι μονοχρωματική αριθ. πρόοδ.} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Scanned with ACE Scanner

$$\mathbb{P}(X_S = 1) = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

Ορίζω $X = \sum_{\substack{S:\text{αριθμ. πρόοδ.} \\ \text{μήκους } k}} X_S$

$$\mathbb{E}X = \sum_{\substack{S:\text{αριθμ.} \\ \text{πρόοδος μήκους } k}} \mathbb{E}X_S = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \underbrace{\#\text{αριθμ. προόδων μήκους } k}_{\substack{\text{καθορίζεται από τους} \\ \text{πρώτους 2 όρους}}} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \binom{N}{2} =$$

$$= \frac{N(N-1)}{2^k} \overset{(1)}{<} 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X=0) > 0 \text{ . Άτοπο!}$$

Εφαρμογή στη Θεωρία αριθμών:

Θεώρημα: (Hardy - Ramanujan)

Έστω $v(x)$ το πλήθος των πρώτων που διαιρούν τον x. Το πλήθος των $x \in \{1, \dots, n\}$ ώστε $|v(x) - \log\log n| > \omega(n)\sqrt{\log\log n}$ είναι το πολύ cn, όπου c: σταθερά που δεν εξαρτάται από το n και $\omega(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Απόδειξη: (Turan)

Παίρνω τον x ομοιόμορφα από το $\{1, \dots, n\}$ και αν p: πρώτος, ορίζω $X_p = \begin{cases} 1, & \text{αν } p \mid x \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Αν X: τυχαία μεταβλητή στο $\{1, \dots, n\}$:

$$v(X) = \sum_p X_p$$

$$\mathbb{P}(X_p = 1) = \frac{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{n} \begin{cases} \leq \frac{1}{p} \\ \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\mathbb{E}(X_p) = \mathbb{P}(X_p = 1)$ άρα $\mathbb{E}v(X) \leq \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \sim \log\log n$

$\mathbb{E}v(X) = \log\log n + O(1)$ $\qquad \geq \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \sim \log\log n$

Από Chebychev:

$$\mathbb{P}\left(x\in\{1,\dots,n\}: |v(x)-\mathbb{E}v(x)| > \omega(n)\sqrt{\log\log n}\right) \le \frac{Var(v(x))}{(\log\log n)\,\omega(n)^2}$$

$$Var(v(x)) = Var\left(\sum x_p\right) = \sum Var(x_p) + \sum_{p\neq q} Cov(x_p, x_q)$$

- $Var(x_p) = \mathbb{E}x_p^2 - (\mathbb{E}x_p)^2 = \mathbb{E}x_p - (\mathbb{E}x_p)^2 \le \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{np} - \frac{1}{n^2}$$

Άρα $\sum_{p\le n} Var(x_p) = \underbrace{\sum_p \frac{1}{p}}_{\log\log n} - \underbrace{\sum_p \frac{1}{p^2}}_{O(1)} + \underbrace{2\sum_p \frac{1}{pn}}_{O(1)} - \underbrace{\sum_p \frac{1}{n^2}}_{O(1)}$

Τελικά, το $\sum_{p\le n} Var(x_p)$ είναι της τάξης $\log\log n$

- $Cov(x_p, x_q) = \mathbb{E}x_p x_q - \mathbb{E}x_p\,\mathbb{E}x_q = \frac{\lfloor \frac{n}{pq} \rfloor}{n} - \frac{\lfloor \frac{n}{p}\rfloor \lfloor \frac{n}{q}\rfloor}{n^2} \le$

$x_p x_q = 1 \Leftrightarrow pq \mid x$

$$\le \frac{1}{pq} - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) - \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

Άρα $\sum_{p\neq q} Cov(x_p, x_q) \le \sum_{p\neq q} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = \frac{2}{n}\sum_{p<q}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) <$

$$< \frac{2}{n}\sum_{p<q}\frac{2}{p} \le \frac{2c}{\cancel{n}}\,\frac{\cancel{n}}{\log n}\sum_{p<n}\frac{1}{p} \le \frac{2c'\log\log n}{\log n} = O(1)$$

⇒ Τοποθετούμε m μπάλες ομοιόμορφα και ανεξάρτητα σε n κουτιά. Θέλουμε να εκτιμήσουμε P(υπάρχουν άδεια κουτιά). Έστω X τυχαία μεταβλητή που μετράει τα άδεια κουτιά.

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το } i \text{ είναι άδειο} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X>0) = \mathbb{E}X = n \cdot \mathbb{E}X_1 = n \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1) = n \cdot \frac{(n-1)^m}{n^m} = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m, \; m = (1+\varepsilon) n \log n$$

$$\overset{\shortparallel}{\mathbb{P}(X \geq 1)}$$

$$\leq \frac{1}{n^{\varepsilon}}$$