04/03/2024

Ανισότητα Bernstein:

Αν $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ είναι ανεξάρτητα πρόσημα $(\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = 1,\ \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = 1/2)$ και $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ : $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left(\frac{-t^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)$

Ανάλογα, αν $p \in [0,1]$ και $\delta_1, \dots, \delta_n$ είναι ανεξάρτητες Bernoulli$(p)$ και $S_n = \delta_1 + \dots + \delta_n$. Τότε

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq t\right) \leq 2e^{\frac{-t^2 n}{4}}$$

Εφαρμογή: (Θεώρημα Weirstrass)

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει πολυώνυμο $Q$ ώστε $\|f - Q\|_\infty < \varepsilon$

Απόδειξη:

τυχόν = οποιοδήποτε
τυχαίο = το παίρνω με μέτρο πιθανότητας

Έστω $p \in [0,1]$ τυχόν και $\varepsilon > 0$. Θέλω να δείξω ότι υπάρχει πολυώνυμο $Q$ ώστε

$$|f(p) - Q(p)| < \varepsilon$$

$$\left[Q(p) = \mathbb{E}f\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathbb{E}f(p) = f(p)\right]$$

$x$: διακριτή $\mathbb{E}f(x) = \sum f(k)\mathbb{P}(x=k)$

Ορίζω $Q(p) = \mathbb{E}f\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \mathbb{P}(S_n = k) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$|f(p) - Q(p)| = \left|\mathbb{E}f(p) - \mathbb{E}f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \mathbb{E}\left|f(p) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| =$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(p)\right| 1_{\{|\frac{S_n}{n} - p| < A\}}}_{E_1} + \underbrace{\mathbb{E}\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(p)\right| 1_{\{|\frac{S_n}{n} - p| \geq A\}}}_{E_2}$$

▹ Για τον $E_1$:

$\exists \delta$ τέτοιο ώστε αν $|x-y| < \delta$ το $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ $\forall x, y \in [0,1]$

Για $A = A(n) \to 0$ θα έχω $E_1 < \mathbb{E}\frac{\varepsilon}{2} \cdot 1_{\{|\frac{S_n}{n} - p| < A\}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Για τον $E_2$:

Έστω $M$ η μέγιστη τιμή της $f$. Τότε

$$E_2 \le 2M\,\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\ge A\right) \underset{\text{Chebychev}}{\le} 2M\,\frac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{A^2} = 2M\,\frac{Var(S_n)}{n^2A^2} \underset{\text{ανεξαρτ.}}{=}$$

$$= 2M\,\frac{n\,Var(B(p))}{n^2A^2} = 2M\,\frac{p(1-p)}{nA^2} \le \frac{1}{2}\,\frac{M}{nA^2}$$

Διαλέγω $A = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ και τότε $E_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ και $E_2 < \frac{1}{2}\frac{M}{A^2\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{2}$

για μεγάλο $n$

Παράδειγμα: (first moment)

Έστω $v_1, \dots, v_m$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Να δείξετε ότι υπάρχει επιλογή προσήμων $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ ώστε:

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_m v_m\|_2 \ge \sqrt{m}$$

Απόδειξη:

Θα δείξουμε ότι $\underset{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m \\ \varepsilon_i \in \{-1,1\}}}{\mathbb{E}} \|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_m v_m\|_2^2 \ge m$

$$\| $$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2 \|v_i\|_2^2 + 2\sum_{i<j} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle v_i, v_j\rangle\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(m + 2\sum_{i<j} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle v_i, v_j \rangle\right) =$$

$$= m + 2\sum_{i<j} \langle u_i, u_j \rangle \underbrace{\mathbb{E}\,\varepsilon_i \varepsilon_j}_{\mathbb{E}\varepsilon_i\, \mathbb{E}\varepsilon_j = 0}$$

$$= m$$

$\boxed{\text{Γενικό πρόβλημα}}$ Έστω $U, V$ κυρτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $v_1, \dots, v_m \in U$. Ζητούμε το μικρότερο $r>0$: $\exists\, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$, ώστε $\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_m v_m \in rV$

(Βιβλίο: Probabilistic Method: Alon, Spencer)

Θεώρημα: (Erdos)
Έστω A ένα υποσύνολο των (μη-μηδενικών) ακεραίων με n στοιχεία. Τότε υπάρχει $B \subseteq A$ με $|B| \geq n/3$ και B sum-free (δεν υπάρχουν $x, y, z \in B$ ώστε $x+y=z$)
(Είναι ανοικτό πρόβλημα αν το n/3 μπορούμε να το κάνουμε $\frac{n}{3}+10$)

Απόδειξη:
sum free υποσύνολα είναι τα $[k, 2k-1]$
Παίρνω ένα μεγάλο πρώτο p, ώστε $A \subseteq \left[-\frac{p}{3}, \frac{p}{3}\right]$, $p = 3k+2 \Leftrightarrow$ $\Rightarrow k = \frac{p-2}{3}$
Αν $x+y=z \Rightarrow x+y \equiv z \pmod p$
Αν $x+y \equiv z \pmod p \Rightarrow p \mid (x+y-z)$. Όμως $|x+y-z| < \frac{p}{3} + \frac{p}{3} + \frac{p}{3} = p$
$\Rightarrow$ Άρα $x+y=z$
Θεωρούμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{Z}_p$.
Παίρνω $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ με αυτό το μέτρο και ορίζω το τυχαίο σύνολο $B_x = A \cap \underbrace{\{x \cdot [k+1, 2k+1]\}}_{\text{sum-free}} = \{\alpha \in A : \alpha x^{-1} \in [k+1, 2k+1]\}$ (1)

$\alpha = xu$
$\alpha x^{-1} = u$

Θέλω ένα τέτοιο $B_x$ με $\geq n/3$ στοιχεία.
Θεωρώ $\mathbb{E}|B_x| = \sum_{\alpha \in A} \mathbb{P}(\alpha \in B_x) \overset{(1)}{=} \sum_{\alpha \in A} \mathbb{P}(\alpha x^{-1} \in [k+1, 2k+1]) =$

ομοιόμορφο
$\alpha x^{-1} = u \Leftrightarrow x^{-1} = u\alpha^{-1}$

$$= \sum_{\alpha \in A} \frac{2k+1-(k+1)+1}{p} = \sum_{\alpha \in A} \frac{k+1}{p} = \frac{k+1}{p}|A|$$

Θέλουμε $\frac{k+1}{p} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3k+3 > p = 3k+2$ που ισχύει