28/02/2024

## Διακύμανση:

Αν $X$ τυχαία μεταβλητή ώστε $\mathbb{E}X^2<+\infty$, ορίζουμε

$$\boxed{Var(X) = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2}$$

• $(X-\mathbb{E}X)^2 = X^2 - 2X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2 \Rightarrow Var(X) = \mathbb{E}X^2 - 2(\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

## Ιδιότητες:

◦ $Var(X+c) = Var(X)$

◦ $Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$

⇒ Αν $X, Y$ τυχαίες μεταβλητές, με $\mathbb{E}X^2, \mathbb{E}Y^2<+\infty$, τότε $\mathbb{E}(X+Y)^2<+\infty$

$$\underbrace{\mathbb{E}X^2}_{<+\infty} + 2\,\mathbb{E}XY + \underbrace{\mathbb{E}Y^2}_{<+\infty}$$

$$\downarrow$$

$\le 2\sqrt{\mathbb{E}X^2 \cdot \mathbb{E}Y^2} < +\infty$, από Cauchy-Schwarz

Οπότε, έχει νόημα το $Var(X+Y)$ και εν γένει

$Var(X+Y) \neq Var(X) + Var(Y)$

↳ $Var(X+Y) = \mathbb{E}(X+Y-\mathbb{E}(X+Y))^2 = \mathbb{E}(\underbrace{X-\mathbb{E}X}_{\bar{X}} + \underbrace{Y-\mathbb{E}Y}_{\bar{Y}})^2 =$

$= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}X)^2 + 2(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y) + (Y-\mathbb{E}Y)^2\right] =$

$= Var(X) + Var(Y) + 2\underbrace{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)}_{\text{όρος}}$

$cov(X,Y)$ συνδιακύμανση

Γενικά $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$

⇒ Στον $\mathbb{R}^n$, αν $X$ τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, $X=(X_1,\dots,X_n)$ και $\mathbb{E}X_i^2<+\infty$, $\forall i=1,\dots,n$, τότε ορίζεται ο πίνακας συνδιακύμανσης

$$\boxed{Cov(X) = (Cov(X_i, X_j))_{i,j}}$$

Ισχύει ότι $Cov(X) = \mathbb{E}\,\overline{X}\,\overline{X}^T$, όπου $\overline{X} = X - \mathbb{E}X$

Μέση τιμή και ανεξαρτησία:
Αν $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$, $i = 1, 2$ είναι χώροι πιθανότητας, τότε
Παίρνουμε $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
$$\mathcal{F} = \sigma(A_1 \times A_2 \ ,\ A_1 \in \mathcal{F}_1,\ A_2 \in \mathcal{F}_2)$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$$
Ορίζεται το μέτρο γινόμενο $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$, που είναι το μοναδικό μέτρο στην $\mathcal{F}$, ώστε $\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}_1(A_1)\,\mathbb{P}_2(A_2)$

Είχαμε δείξει ότι ~~τα~~ $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητα, αν και μόνο αν η κατανομή του $\mu_{(X_1,\dots,X_n)}$ είναι η κατανομή γινόμενο.

$$\boxed{\mu_{(X_1,\dots,X_n)} = \mu_{X_1} \otimes \mu_{X_2} \otimes \dots \otimes \mu_{X_n}}$$

Θεώρημα:
Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές και ανεξάρτητες, τότε η τυχαία μεταβλητή $X_1 X_2 \cdots X_n$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει $\mathbb{E}X_1 \cdots X_n = \mathbb{E}X_1\,\mathbb{E}X_2 \cdots \mathbb{E}X_n$

Απόδειξη:
$$\mathbb{E}|X_1 \cdots X_n| = \int_{\mathbb{R}^n} |x_1 x_2 \cdots x_n| \, d\mu_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\underset{\text{ανεξαρτησία}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |x_1 x_2 \cdots x_n| \, d\mu_{X_1}(x_1)\, d\mu_{X_2}(x_2) \cdots d\mu_{X_n}(x_n)$$
$$\underset{\text{Θ. Fubini}}{=} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} |x_i| \, d\mu_{X_i}(x_i) < +\infty, \text{ άρα } |x_1 \cdots x_n| \text{ ολοκληρώσ.}$$

Για την $\mathbb{E}X_1 \cdots X_n = \mathbb{E}X_1 \cdots \mathbb{E}X_n$, επαναλαμβάνω το επιχείρημα

⚠ Το αντίστροφο <u>ΔΕΝ</u> ισχύει!

Π.χ. $X$ ομοιόμορφη στο $\{-1, 0, 1\}$ και $Y = |X|$

Τότε $\mathbb{E}XY = 0 = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$ Όμως $X, Y$ όχι ανεξάρτητες

**Παρατήρηση:**

Από το Θεώρημα, αν $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow \mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$, οπότε $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$, άρα π.χ. $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$

**Πρόταση:**

Αν $X$ μη αρνητική τυχαία μεταβλητή, τότε

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,dt$$

**Απόδειξη:**

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \left(\int_0^{X(\omega)} 1\,dt\right) d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \left(\int_0^\infty 1_{\{X(\omega) > t\}}\,dt\right) d\mathbb{P}(\omega)$$

$$= \int_0^\infty \int_\Omega 1_{\{X(\omega) > t\}}\,d\mathbb{P}(\omega)\,dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,dt$$

**Ανισότητες:**

① **Ανισότητα (Markov):**

Αν $X$ μη αρνητική, τυχαία μεταβλητή, τότε για κάθε $t > 0$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}X}{t}}$$

**Απόδειξη:**

Έστω $t > 0$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X \cdot 1_{\{X \geq t\}} + \mathbb{E}X \cdot 1_{\{X < t\}} \geq \mathbb{E}\,t\,1_{\{X \geq t\}} = t\,\mathbb{P}(X \geq t)$$

(i) $\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}(X^p \geq t^p) \leq \dfrac{\mathbb{E}X^p}{t^p}$

(ii) (Chernoff): $\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda t}) \leq \dfrac{\mathbb{E}e^{\lambda X}}{e^{\lambda t}}$

(iii) (Chebychev): $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X| \geq t) \overset{Markov}{=} \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X|^2 \geq t^2) \leq$
$\leq \dfrac{\mathbb{E}|X-\mathbb{E}X|^2}{t^2} = \dfrac{Var(X)}{t^2}$

② Ανισότητα Hölder:
Αν $p, q \geq 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε $\mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} (\mathbb{E}|Y|^q)^{1/q}$

③ Ανισότητα Minkowski:
Αν $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$. Τότε $p \geq 1$, ισχύει $\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$
Απόδειξη:
Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα:
$\|X\|_p = \sup\{\mathbb{E}XY, Y$: τυχαία μεταβλητή, ώστε $\mathbb{E}|Y|^q \leq 1\}$
Απόδειξη:
$\mathbb{E}XY \overset{Hölder}{\leq} (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} \underbrace{(\mathbb{E}|Y|^q)^{1/q}}_{\leq 1} \leq \|X\|_p$

$\Rightarrow \sup\{\mathbb{E}XY \dots \mathbb{E}|Y|^q \leq 1\} \leq \|X\|_p$ (*)
Αν πάρουμε $Y = sign(X)|X|^{p-1}\|X\|_p^{-p/q}$ (διαλέγουμε Y ώστε να ισχύει η ισότητα στη Hölder)
Τότε $\mathbb{E}XY = \|X\|_p$
Άρα $\sup\{\mathbb{E}XY\} \geq \|X\|_p$ (**)

Άρα:
$\|X+Y\|_p = \sup\{\mathbb{E}(X+Y)Z : \mathbb{E}|Z|^q \leq 1\} = \sup\{\mathbb{E}XZ + \mathbb{E}YZ : \mathbb{E}|Z|^q \leq 1\}$
$\leq \sup\{\mathbb{E}XZ : \mathbb{E}|Z|^q \leq 1\} + \sup\{\mathbb{E}YZ : \mathbb{E}|Z|^q \leq 1\} = \|X\|_p + \|Y\|_p$

Παρατήρηση: Αν $0 < p < 1$, τότε ΔΕΝ ισχύει!

④ Ανισότητα Jensen:
Αν X τυχαία μεταβλητή και f κυρτή, ώστε $\mathbb{E}X$ και η $\mathbb{E}f(X)$ να ορίζονται, τότε $f(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}f(X)$

Απόδειξη:

Στην περίπτωση που $f$: παραγωγίσιμη

Ισχύει ότι $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Για $x_0 = \mathbb{E}X \Rightarrow f(x) \geq f(\mathbb{E}X) + f'(\mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)$

Παίρνω μέση τιμή $\Rightarrow \mathbb{E}f(x) \geq f(\mathbb{E}X)$

⑤ Ανισότητα Bernstein:

Έστω $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ ομοιόμορφες, ανεξάρτητες και $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε, $\forall t > 0$ ισχύει ότι

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left\{\frac{-t^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}\right\}$$

Απόδειξη:

Έστω $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i$. Η $S$ είναι συμμετρική (δηλαδή η $S$ και η $-S$ έχουν την ίδια κατανομή)

$$\mathbb{P}(|S| \geq t) = \mathbb{P}(\{S \geq t\} \cup \{-S \geq t\}) = \mathbb{P}(S \geq t) + \mathbb{P}(-S \geq t) = 2\mathbb{P}(S \geq t)$$

Έστω $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(S \geq t) = \mathbb{P}(e^{\lambda S} \geq e^{\lambda t}) \leq \frac{\mathbb{E}e^{\lambda S}}{e^{\lambda t}}$$

Από ανεξαρτησία $\mathbb{E}e^{\lambda S} = \mathbb{E}e^{\lambda(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i)} \overset{\text{ανεξ}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, e^{\lambda \alpha_i \varepsilon_i} =$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{\lambda \alpha_i} + e^{-\lambda \alpha_i}}{2} \leq \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda^2 \alpha_i^2 / 2} = \exp\left(\frac{\sum \lambda^2 \alpha_i^2}{2}\right)$$

Γνωρίζω ότι $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \leq e^{(t^2/2)}$

Τελικά: $\mathbb{P}(S \geq t) \leq \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 \alpha_i^2}{2} - \lambda t\right)$, για κάθε $\lambda$

Διαλέγω $\lambda$, ώστε $f(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 \alpha_i^2\right)/2 - \lambda t$ να παίρνει την ελάχιστη τιμή. Άρα $\lambda = \frac{t}{\sum \alpha_i}$ και προκύπτει το ζητούμενο