

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. (α) Έστω a ακέραιος αριθμός. Δείξτε ότι το 4 δεν διαιρεί το $a^2 - 2$ ούτε το $a^2 - 3$.
 (β) Αν για τον ακέραιο a ισχύει ότι $4|a - 3$ δείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y για τους οποίους έχουμε $x^2 + y^2 = a$
2. Έστω ότι $a^s \equiv 1 \pmod{m}$ και $a^t \equiv 1 \pmod{m}$. Αν $d = \mu.κ.δ.(s, t)$ να δειχθεί ότι $a^d \equiv 1 \pmod{m}$.
3. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό n έχουμε ότι $n^5 = n \pmod{30}$ (Υπόδειξη: αρχίστε με το $n^5 - n$).
4. (α) Γράψτε όλα τα μή μηδενικά στοιχεία του δακτυλίου \mathbb{Z}_{13} και δίπλα στο καθένα το αντίστροφό του.
 (β) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου \mathbb{Z}_{24} . Για κάθε ένα από αυτά βρείτε το αντίστροφό του.
5. Ποιό είναι το αντίστροφο $[7]^{-1}$ του στοιχείου $[7]$ στο σώμα \mathbb{Z}_{17} ;
6. Αν $p \neq 2$ είναι πρώτος αριθμός γνωρίζουμε ότι τα μή-μηδενικά στοιχεία του \mathbb{Z}_p είναι αντιστρέψιμα. Βρείτε το αντίστροφο του στοιχείου $[2]$ (Υπόδειξη: κάνετε πρώτα μερικά παραδείγματα για συγκεκριμένες τιμές του p).
7. (α) Δείξτε ότι $10 | 101^{2003} - 1$.
 (β) Δείξτε ότι, αν $a \in \mathbb{N}$ με $(a, 23) = 1$, τότε $23 | a^{154} - 1$.
 (γ) Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 3^{1000} δια του 7.
8. Δείξτε ότι $7 | 111^{333} + 333^{111}$.
9. Δείξτε ότι το αντίστροφο του $[5]$ στον δακτύλιο \mathbb{Z}_{101} είναι τό $[81]$. Ποιό είναι τό υπόλοιπο της διαίρεσης του 5^{99} δια του 101;
10. Δείξτε ότι, για κάθε ακέραιο n , ο αριθμός $n^{37} - n$ είναι πολλαπλάσιο του 383838. (Υπόδειξη: $383838 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$).
11. Έστω p πρώτος αριθμός και έστω $[a] \neq [0]$ ένα στοιχείο του \mathbb{Z}_p . Δείξτε ότι δεν υπάρχει στοιχείο του \mathbb{Z}_p που να ικανοποιεί την εξίσωση $x^p - x + [a] = [0]$ (δηλ. η εξίσωση δεν έχει λύση στο \mathbb{Z}_p).
12. Δείξτε ότι για κάθε πρώτο $p \geq 7$, ο αριθμός 111...1 (με $p - 1$ το πλήθος ψηφία = 1) διαιρείται από τό p . (Υπόδειξη: $11...1 = 1 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^{p-2} = \dots$).
13. Δείξτε ότι για κάθε πρώτο $p \geq 3$ και για κάθε ακέραιο a , ισχύει ότι $a^p \equiv a \pmod{2p}$.
14. Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις των παρακάτω διοφαντικών εξισώσεων:
 - (α) $745x + 85y = 30$,
 - (β) $18x - 5y = 10$,
 - (γ) $72y - 56x = 12$,
 - (δ) $141x + 34y = 30$.
15. Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις των παρακάτω εξισώσεων με ισοτιμίες. Για κάθε μια από αυτές βρείτε όλες τις μή ισοδύναμες (\pmod{m}) λύσεις.
 - (α) $8x \equiv 12 \pmod{21}$,
 - (β) $8x \equiv 12 \pmod{20}$,
 - (γ) $14x \equiv 20 \pmod{91}$,

(δ) $14x \equiv 63 \pmod{91}$.

16. (α) Δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο τρόποι να τοποθετήσουμε 51 ίδια αντικείμενα σε κουτιά, έτσι ώστε τό κάθε κουτί να περιέχει 5 ή 6 αντικείμενα.
- (β) Έχοντας δύο δοχεία τών 4 και 5 κιλών αντιστοίχως, μπορούμε να γεμίσουμε το ένα από αυτά με 3 κιλά νερό;