

# Άσκσεις Φυλλάδιο 0

(1) Να αποδείξετε ότι κάθε πεπερασμένο ακεραίο περιοχή είναι γόφα.

(2) Έστω  $R$  ακεραίο περιοχή. Να αποδείξετε ότι (i) κάθε πρώτο στοιχείο του  $R$  είναι ανάγωγο.  
(ii) Αν  $R$  Π.Μ.Α τότε κάθε ανάγωγο είναι πρώτο.

(3) Αν  $A \subseteq R$ , τότε κάθε ιδεώδες του δακτύλιου  $\frac{R}{A}$  έχει τη μορφή  $\frac{B}{A}$  όπου  $A \subseteq B$ .

(4) Να αποδείξετε ότι η ακεραίο περιοχή  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ , δεν είναι Π.Μ.Α.

(5) Ο δακτύλιος  $R = \mathbb{Z}[i]$  είναι Π.Μ.Α. Πως μπορούμε να ελέγξουμε όπως όμοια ότι  $10 = 2 \cdot 5 = (1+3i)(1-3i)$ ;

(6) Έστω  $R$  δακτύλιος της Noether και  $\varphi: R \rightarrow R$  επιμορφισμός δακτύλιων. Να αποδείξετε ότι ο  $\varphi$  είναι εσομορφισμός.

(7) Αν  $R$  Π.Κ.Ι. και  $p \in R, p \neq 0$  οι ακόλουθες προτάσεις είναι μεταξύ τους εσοδύναμες:

(i) Το  $p$  είναι πρώτο στοιχείο του  $R$

(ii) Το  $p$  είναι ανάγωγο στοιχείο του  $R$

(iii) Το ιδεώδες  $\langle p \rangle$  είναι τοιχείωμα

(iv) Ο δακτύλιος  $\frac{R}{\langle p \rangle}$  είναι γόφα

(v) Ο δακτύλιος  $\frac{R}{\langle p \rangle}$  είναι ακεραίο περιοχή.