Συναρτησιακή Ανάλυση

$1^η$ Εργασία–Θεωρία Πιθανοτήτων

Άσκηση 1. *Υποθέτουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα* (X, Y) *είναι τέτοιο ώστε οι* X *και* Y *να είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Είναι το* (X, Y) *συνεχές τυχαίο διάνυσμα;*

Άσκηση 2. *Μπορείτε να βρείτε ένα τυχαίο διάνυσμα* (X, Y, Z) *στον* $\mathbb{R}^3$ *ώστε για όλους τους πραγματικούς αριθμούς* a, b, c *με* $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ *η τυχαία μεταβλητή* $aX + bY + cZ$ *να είναι ομοιόμορφη στο* $[-1, 1]$*;*

Άσκηση 3. *Θεωρούμε μια ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή* X *στο* $[0, 2]$*. Να βρείτε την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών* $Y = \max\{1, X\}$ *και* $Z = \min\{X, X^2\}$.

Άσκηση 4. *Αν για τα ενδεχόμενα* $A_1, \ldots, A_n$ *και για κάθε* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *ισχύει ότι*

$$\mathbb{P}\left(A_1^{\varepsilon_1} \cap \cdots \cap A_n^{\varepsilon_n}\right) = \mathbb{P}\left(A_1^{\varepsilon_1}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(A_n^{\varepsilon_n}\right),$$

όπου $A^\varepsilon = A$ *αν* $\varepsilon = 0$ *και* $A^\varepsilon = A^c$ *αν* $\varepsilon = 1$*, τότε να αποδείξετε ότι η οικογένεια των* A_i *είναι ανεξάρτητη.*

Άσκηση 5. *Να κατασκευάσετε μια ακολουθία* $X_1, X_2, \ldots$ *ανεξάρτητων, ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που είναι ομοιόμορφες στο* $(0, 1]$.

Άσκηση 6. *Χρησιμοποιώντας την παραπάνω άσκηση να κάνετε την παρακάτω κατασκευή. Αν Δίνονται συναρτήσεις κατανομής* $F_1, F_2, \ldots$*, να κατασκευάσετε ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών* $Y_1, Y_2, \ldots$ *ώστε* $F_{Y_i} = F_i$ *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots$

Άσκηση 7. *Αν τα ενδεχόμενα* $A_1, \ldots, A_n$ *είναι ανεξάρτητα, να αποδείξετε ότι*

$$\left(1 - e^{-1}\right) \min\left\{1, \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right\} \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \min\left\{1, \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right\}.$$

Άσκηση 8. *Υπουθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα* $A_1, A_2, \ldots$ *είναι ανεξάρτητα και ότι* $\mathbb{P}(A_n) \in (0, 1)$ *για κάθε* n*. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο «άπειρα από τα* A_n *συμαβαίνουν» έχει πιθανότητα* 1*, αν και μόνο αν, το ενδεχόμενο «ένα τουλάχιστον από τα* A_n *συμβαίνει» έχει πιθανότητα* 1.

Άσκηση 9. *Θεωρούμε* Ω *το σύνολο των θετικών ακεραίων και έστω* A_k *το σύνολο των θετικών ακεραίων που διαιρούνται με τον αριθμό* k*,* $k \geqslant 1$*. Υπάρχει μέτρο πιθανότητα* $\mathbb{P}$ *που να ορίζεται στο* 2^Ω*, ώστε* $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k}$*, για κάθε* $k = 1, 2, \ldots$*;*

Άσκηση 10. *Θεωρούμε μια ακολουθία* $X_1, X_2, \ldots$ *ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n z^n$ *είναι σταθερή σχεδόν βεβαίως.*