21/02/2023

Πρόταση:

Αν X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμες, τότε οι τυχαίες μεταβλητές $f(X), g(Y)$ είναι ανεξάρτητες

Απόδειξη:

$$\mathbb{P}(f(X) \in S_1, g(Y) \in S_2) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(S_1), Y \in g^{-1}(S_2)) \overset{X,Y}{\underset{\text{ανεξ.}}{=}} \mathbb{P}(X \in f^{-1}(S_1))\,\mathbb{P}(Y \in g^{-1}(S_2)) = \mathbb{P}(f(X) \in S_1)\,\mathbb{P}(g(Y) \in S_2)$$

Γενικά

Αν
$$\begin{matrix} X_{1,1}, & \dots, & X_{1,n_1} \\ X_{2,1}, & \dots, & X_{2,n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{k,1}, & \dots, & X_{k,n_k} \end{matrix}$$
ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

και
$$\begin{matrix} f_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R} \\ f_2 : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R} \\ \vdots \\ f_k : \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R} \end{matrix}$$
μετρήσιμες, τότε τα
$$\begin{matrix} Y_1 = f_1(X_{1,1}, \dots, X_{1,n_1}) \\ Y_2 = f_2(X_{2,1}, \dots, X_{2,n_2}) \\ \vdots \\ Y_k = f_k(X_{k,1}, \dots, X_{k,n_k}) \end{matrix}$$
είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

⇒ Αν μ, ν είναι δύο μέτρα στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, τότε με $\mu \otimes \nu$ συμβολίζουμε το μοναδικό μέτρο στον $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, ώστε:

$$\mu \otimes \nu (A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

Πρόταση:

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

(ii) $F_{(X,Y)}((s,t)) = F_X(s) F_Y(t)$

(iii) $\underbrace{\mu_{(X,Y)}}_{\text{η κατανομή του } (X,Y)} = \mu_X \otimes \mu_Y$

Απόδειξη:

Σαρώθηκε με το CamScanner

(i) $\Rightarrow$ (ii) $F_{(X,Y)}((s,t)) = \mathbb{P}(X \le s, Y \le t) = \mathbb{P}(X \le s)\mathbb{P}(Y \le t) =$

$\{X \le s\} \in \sigma(X)$ $\quad = F_X(s) F_Y(t)$

$\{Y \le t\} \in \sigma(Y)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) (Θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση ότι A_i ανεξ. και π-συστ. $\Leftrightarrow \sigma(A_i)$ ανεξάρτητα)

Οι οικογένειες $\{X \le s\}$ είναι π-συστήματα και παράγουν τις $\sigma(X)$ και $\sigma(Y)$, οπότε είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν οι $\sigma(\ )$ είναι ανεξάρτητες.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Γνωρίζοντας το (i), η $\mu_{(X,Y)} = \mu_X \otimes \mu_Y$

$\mathbb{P}((X,Y) \in A \times B) \ldots$ $\quad \mu_X(\Gamma) = \mathbb{P}(X \in \Gamma),\ \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \ldots$ $\quad \mu_Y(\Delta) = \mathbb{P}(Y \in \Delta),\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

για $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

Ισχύει για $A \times B$ με $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Δηλαδή, ισχύει σε ένα π-σύστημα, που παράγει την $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Παίρνουμε $A = (-\infty, s]$ και $B = (-\infty, t]$ (όπως έχουμε γράψει τα A και B στο προηγούμενο βήμα)

<u>Πρόταση:</u>

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητες $f_1, f_2, \ldots, f_n$, τότε είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν το τυχαίο διάνυσμα $(X_1, \ldots, X_n)$ έχει πυκνότητα

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n) = f_1(x_1)\ldots f_n(x_n)$$

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $A_1, \ldots, A_n$ Borel και έστω $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες

$\mathbb{P}((X_1,\ldots,X_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \ldots \mathbb{P}(X_n \in A_n) =$

$$= \int_{A_1} f_1(x_1)dx_1 \ldots \int_{A_n} f_n(x_n)dx_n \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n} f_1(x_1)\ldots f_n(x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$$

Όμως, $\mathbb{P}((X_1,\ldots,X_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \displaystyle\int_{A_1 \times \ldots \times A_n} f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$

Πρόταση:

Αν $X_1, \dots, X_n$ είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τιμές σε κάποια $A_1, \dots, A_n$, τότε είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $\mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = \mathbb{P}(X_1 = a_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = a_n)$

Παραδείγματα:

① $\Omega = \{0,1\}^n$ και $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ομοιόμορφη, δηλαδή $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/2^n$

Ορίζουμε τα $A_k = \{\omega \in \Omega : \omega_k = 0\}$, $k = 1, \dots, n$

Να δειχθεί ότι τα $A_1, \dots, A_n$ είναι ανεξάρτητα.

Έστω $1 \le i_1 < i_2 \dots < i_k \le n$

$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega_{i_1} = \omega_{i_2} = \dots = \omega_{i_k} = 0\})$

$= \dfrac{2^{n-k}}{2^n} = \dfrac{1}{2^k}$ (π.χ. για $n=6$ — $\underset{i_1}{0}$ — $\underset{i_2}{0}$ $\underset{i_3}{0}$ —)

$= \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k})$

$\|$

$\dfrac{2^{n-1}}{2^n} = \dfrac{1}{2}$

Η οικογένεια είναι π-σύστημα, άρα από θεώρημα τα $A_1, \dots, A_n$ είναι ανεξάρτητα

② $\Omega = \{1,2,3,4\}$ και $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbb{P}$: ομοιόμορφο, δηλαδή $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/4$ $\forall \omega \in \Omega$

Έστω $A_i = \{1, i+1\}$, $i = 1,2,3$

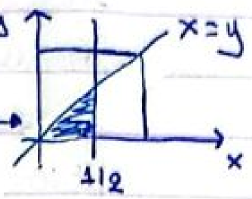
$\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \dfrac{1}{4} = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(\{1\}) = \dfrac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$

Αυτά τα ενδεχόμενα είναι ανά δύο ανεξάρτητα, αλλά δεν είναι ανεξάρτητα

③ $\Omega = [0,1]^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1]^2)$, $\mathbb{P}$ ομοιόμορφη



$A = B = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x > y\}$ και

$\Gamma = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x < 1/2\}$

$\mathbb{P}(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\Gamma)$

$\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(A \cap \Gamma) = \frac{1}{8} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\Gamma)$

$\mathbb{P}(B \cap \Gamma) = \frac{1}{8} \neq \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\Gamma)$

④ Θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots$ στο $\Omega = (0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0,1])$ και $\mathbb{P}$ το Leb

Αν $\omega \in \Omega$ γράφουμε $\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i}{2^i} = 0{,}\omega_1\omega_2\dots$ και $\omega_i \in \{0,1\}$

$\frac{1}{2} = 0{,}011\dots$

$X_1(\omega) = 0{,}\omega_1\ \omega_3\ \omega_6\ \omega_{10}$

$X_2(\omega) = 0{,}\omega_2\ \omega_5\ \omega_9$

$\vdots \quad = 0{,}\omega_4\ \omega_8$

$\quad = 0{,}\omega_7$

Ισχυρισμοί:

- Οι X_i είναι ανεξάρτητες
- Οι X_i είναι ομοιόμορφες στο $(0,1]$
  - Υπόδειξη: $\mathbb{P}\left(\frac{j}{2^k} < X_i \leq \frac{j+1}{2^k}\right) \rightsquigarrow \mathbb{P}(\alpha < X_i \leq \beta) = \beta - \alpha$

Σαρώθηκε με το CamScanner