19/02/2024

Για κάθε τυχαία μεταβλητή X, ορίζεται ένα μέτρο μ_X ως εξής: $\underset{\mathcal{B}(\mathbb{R})}{\mu_X(B)} = \mathbb{P}(X \in B)$ (Η κατανομή του X)

Η συνάρτηση κατανομής του X: $F_X(t) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, t])$
$= \mathbb{P}(X \leq t)$

Έχουμε δείξει ότι αν $F_X = F_Y$, τότε $\mu_X = \mu_Y$.

Ιδιότητες της συνάρτησης F_X:

(i) F_X αύξουσα, δηλαδή αν $s \leq t$ τότε $F_X(s) \leq F_X(t)$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} F_X(t) = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} F_X(t) = 1$

(iii) Η F_X είναι δεξιά συνεχής, δηλαδή $\lim_{t \to s^+} F_X(t) = F(s)$

Σημείωση:
Το πλήθος των σημείων ασυνέχειας της F_X είναι το πολύ αριθμήσιμο

Απόδειξη:

(i) Έστω $s \leq t$, τότε $\{\omega : X(\omega) \leq s\} \subseteq \{\omega : X(\omega) \leq t\}$
$\Rightarrow \mathbb{P}(X \leq s) \leq \mathbb{P}(X \leq t)$

(ii) Το όριο $\lim_{t \to -\infty} F_X(t)$ υπάρχει και άρα είναι ίδιο με το

$\lim_{n \to +\infty} F_X(-n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X \leq -n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$, με $A_k = \{X \leq -k\}$

$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

Πρόταση:
Οι (i), (ii), (iii) χαρακτηρίζουν τις συναρτήσεις κατανομής.
Δηλαδή, αν μία συνάρτηση F ικανοποιεί τις (i), (ii), (iii), τότε υπάρχει τυχαία μεταβλητή X, ώστε $F_X = F$.

Απόδειξη:

Έστω F είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(F(X) \leq F(t)) = F(t)$

$\mathbb{P}(\omega : F(X(\omega)) \leq F(t))$ θέλω

Διαλέγω $X(\omega) = F^{-1}(\omega)$ $\forall \omega \in (0,1)$ Άρα $\mathbb{P}_{Leb}(\omega : \omega \leq F(t)) = F(t)$

Διαλέξαμε $X = F^{-1}(U)$

U η ομοιόμορφη στο $[0,1]$

Μένει να δικαιολογήσουμε ότι έχουμε μετρήσιμη συνάρτηση

$\boxed{\text{Στην γενική περίπτωση:}}$ (αύξουσα, αλλά όχι συνεχής, για αριθμήσιμα το πλήθος άλματα)

Ορίζαμε $X(\omega) = \inf\{y : F(y) \geq \omega\}$, $\omega \in [0,1]$

Τότε: $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}_{Leb}(\omega : \omega \leq F(t)) = F(t)$

Ισχύει ότι $X(\omega) \leq t \Leftrightarrow \omega \leq F(t)$

$\Rightarrow$ Στα τυχαία διανύσματα X στον $\mathbb{R}^n$, γράφουμε $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

Συνάρτηση κατανομής του X είναι η $F_X(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n)$

Οι αντίστοιχες ιδιότητες:

(i) Αν $t_i \leq s_i$ $\forall i = 1, \dots, n$, τότε $F_X(t_1, \dots, t_n) \leq F_X(s_1, \dots, s_n)$

(ii) Αν $\inf\limits_{k \leq n} t_k^{(m)} \xrightarrow[m]{} -\infty$, τότε $F_X(t_1^{(m)}, \dots, t_n^{(m)}) \xrightarrow[m]{} 0$

Αν $\inf\limits_{k \leq n} t_k^{(m)} \xrightarrow[m]{} +\infty$, τότε $F_X(t_1^{(m)}, \dots, t_n^{(m)}) \xrightarrow[m]{} 1$

(iii) Η F_X είναι δεξιά συνεχής

Οι (i), (ii), (iii) χαρακτηρίζουν τις συναρτήσεις κατανομής στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός:

- Θα λέμε ότι η X είναι διακριτή, αν υπάρχει $\underset{\{a_1, a_2, \dots\}}{A}$ αριθμήσιμο, ώστε

$\mathbb{P}(X \in A) = 1$. Δηλαδή, υπάρχει p_k ώστε $\mathbb{P}(X = a_k) = p_k$ και

$\sum p_k = 1$

- Θα λέμε ότι η X είναι συνεχής, αν υπάρχει $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ώστε
$\mu_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \int_B f \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ειδικότερα, $\mu((-\infty, t]) = F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$

Οπότε, αναγκαστικά η F_X είναι συνεχής.
Θα λέμε ότι η f είναι η πυκνότητα του X.

Πρόταση:
Αν f πυκνότητα, τότε ισχύουν:
(i) $\int_{\mathbb{R}} f = 1$

(ii) $f \geq 0$ σχεδόν παντού
(iii) Η f προσδιορίζεται από το X (εκτός από σύνολα μέτρου 0)
Απόδειξη:
Το (i) προκύπτει απ' τον ορισμό
(ii) $\{f < 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{f \leq -1/n\}}_{A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\mu_X(A_n) = \int_{A_n} f \leq -\frac{1}{n} Leb(A_n) \Rightarrow$ Πρέπει $Leb(A_n) = 0$. Άρα

$Leb(\{f<0\}) = Leb\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} Leb(A_n) = 0$

Η απόδειξη για το (iii) ανάλογη

Θεώρημα:
Οι ιδιότητες (i) και (ii) χαρακτηρίζουν τις πυκνότητες
Απόδειξη:

Ορίζουμε $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$.

Η F έχει τις ιδιότητες:

(i) Αύξουσα ($f \geq 0$ σχεδόν παντού)

(ii) $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$ και $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$

(iii) Δεξιά συνεχής (Θεμελιώδες θεώρημα απειροστικού)

__Παράδειγμα:__

Αν
$$F(x) = \begin{cases} x/2 & , x \in [0,1) \\ 1 & , x \in [1, +\infty) \\ 0 & , x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Ικανοποιούνται ότι $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$ και $F(x)$ δεξιά συνεχής.

$F(x)$: προφανώς μη διακριτή και όχι συνεχής.

__Ανεξαρτησία:__

__Ορισμός:__ Αν X τυχαίος μεταβλητή, τότε $\sigma(X)$ θα συμβολίζουμε την ελάχιστη σ-άλγεβρα για την οποία η X είναι μετρήσιμη. Δηλαδή $\sigma(X) = \sigma(X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

Αν $A \in \mathcal{F}$, $\sigma(A) = \sigma(\underbrace{1_A}_{\text{χαρακτηριστική}}) = \{A, A^c, \Omega, \emptyset\}$

__Ορισμός:__ Η οικογένεια $\{F_i\}_{i \in I}$, $F_i \subseteq \mathcal{F}$ είναι ανεξάρτητη αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $A_1 \in \mathcal{F}_{a_1}, A_2 \in \mathcal{F}_{a_2}, \dots, A_n \in \mathcal{F}_{a_n}$ ισχύει $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n)$

- Η οικογένεια των ενδεχομένων $\{A_i\}_{i \in I}$ θα λέμε ότι είναι ανεξάρτητη αν η $\{\sigma(A_i)\}_{i \in I}$ είναι ανεξάρτητη.
- Η οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών $\{X_i\}_{i \in I}$ θα λέμε ότι είναι ανεξάρτητη, αν η $\{\sigma(X_i)\}_{i \in I}$ είναι ανεξάρτητη

Παράδειγμα:
Αν θέλω να δείξω ότι τα $\{A_1, A_2, A_3\}$ είναι ανεξάρτητα
$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(B_3) \quad \forall B_i \in \{\emptyset, \Omega, A_i, A_i^c\}$
Πρέπει να ελέγξουμε 4^3 σχέσεις.

Θεώρημα:
Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια από π-συστήματα. Τότε η $\{A_i\}_{i\in I}$ είναι ανεξάρτητη αν και μόνο αν η $\{\sigma(A_i)\}_{i\in I}$ είναι ανεξάρτητη

Απόδειξη:
Έστω $I = \{1, 2, \dots, n\}$
Ορίζουμε $\Lambda_1 = \{B_1 \in F : \forall A_2 \in \Lambda_2, \dots, A_n \in \Lambda_n$
$\mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(B_1) \cdots \mathbb{P}(A_n)\}$

έχω ότι $\Lambda_1 \supseteq A_1$
Δείχνουμε ότι η Λ_1 είναι λ-σύστημα. Οπότε, από το Θεώρημα Dynkin, $\Lambda_1 \supseteq \sigma(A_1)$
Συνεχίζω όμοια
π.χ. $\Lambda_2 = \{B_2 \in F, \forall A_3 \in \Lambda_3, \dots, \forall A_n \in \Lambda_n$
σταθεροποιώ $B_1 \in \sigma(A_1)$ $\quad \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A_3)\cdots\mathbb{P}(A_n)\}$

Έχουμε ότι $\Lambda_2 \supseteq A_2$
Δείχνουμε ότι η Λ_2 είναι λ-σύστημα. Άρα $\Lambda_2 \supseteq \sigma(A_2) \dots$