14/02/2024

Συνέχεια παραδείγματος προηγούμενης διάλεξης:

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n, \dots), \ \omega_i \in \{0,1\}\}$

$\mathcal{F} = \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k\}$. Από Θ. Tychonoff, ο $\{0,1\}^\infty$ είναι συμπαγής

Αν $B \in F$ είναι κλειστό και συμπαγές.

Οπότε, αν $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ φθίνουσα ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{F}$,

με $\bigcap B_i = \phi \Rightarrow \bigcup B_i^c = \Omega$

Τότε, πρέπει κάποιο $B_i = \phi$, άρα $B_k = \phi$ για $k \geq i$

Άρα $\lim \mathbb{P}(B_k) = 0$

Άλλος τρόπος:

Έστω $f: \Omega \to [0,1]$ με $f(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i}{2^i}$

- Για το $[0,1]$ έχω την τριάδα $([0,1], \underbrace{\mathcal{B}[0,1]}_{\text{Borel}}, \underbrace{\mu_{Leb}}_{\text{ομοιόμορφο}})$

Οπότε ορίζουμε $\mathcal{F} = \{f^{-1}(B)$ με $B \in \mathcal{B}[0,1]\}$

Η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα

$\mathbb{P}(A) = \mu_{Leb}(f(A))$

Τότε, αυτό είναι ένα μέτρο πιθανότητας

$\Rightarrow$ Έστω E το ενδεχόμενο να φέρουμε στις περιττές ρίψεις κορώνα

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\mathbb{P}(E)$

Γράφουμε $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{2i-1}$

Αν $E_n = \bigcap_{i=1}^{n} C_{2i-1}$, τότε E_n φθίνουσα, άρα $\mathbb{P}(E) = \lim_n \mathbb{P}(E_n)$

$= \lim_n \mathbb{P}(E_n) = \lim_n \frac{1}{2^n} = 0$

Τυχαίες μεταβλητές:

Θα λέμε ότι η $X: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι $\boxed{\text{τυχαία μεταβλητή}}$ στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ αν είναι μετρήσιμη, δηλαδή αν $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(Τυχαίο διάνυσμα $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$)

Συμβολισμός: ① $\{X \le t\}$ για $t \in \mathbb{R}$

$$\{X \le t\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\}$$

② $\{X \in B\}$ για B

$$\{X \in B\} = \{\omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)$$

Πρόταση:
Αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $\{X \le t\} \in \mathcal{F}$, τότε η X είναι τυχαία μεταβλητή.

Απόδειξη:
Ορίζω $\mathcal{F}_0 = \{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$

(i) Δείχναμε ότι $\mathcal{F}_0$ είναι σ-άλγεβρα

(ii) Η $\mathcal{F}_0$ περιέχει τα $(-\infty, t]$ (από υπόθεση)

(iii) Άρα: $\mathcal{F}_0 \supseteq \sigma((-\infty, t], t \in \mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Πρόταση:
Αν X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές, τότε $X+Y$ είναι τυχαία μεταβλητή και $X \cdot Y$ είναι τυχαία μεταβλητή.

Απόδειξη:

◇ $\{X+Y > t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{X > q, Y > t-q\} \in \mathcal{F}$ (αριθμήσιμες τομές από ενδεχόμενα)

◇ Δείχνουμε ότι η X^2 είναι τυχαία μεταβλητή

$$\{X^2 \le t\} \underset{t \ge 0}{=} \{-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}\} = \underbrace{\{X \le \sqrt{t}\} \setminus \{X < -\sqrt{t}\}}_{\in \mathcal{F}}$$

Άρα $X \cdot Y = \dfrac{(X+Y)^2 - X^2 - Y^2}{2}$: μετρήσιμη

Πρόταση:
Αν X τυχαία μεταβλητή και $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-μετρήσιμη, τότε η $f(X)$ είναι τυχαία μεταβλητή

Απόδειξη:

$$\underbrace{(f(X))^{-1}}_{\text{σύνθεση}}(B) = X^{-1}(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \text{Borel}}) \in \mathcal{F}$$

$\downarrow$
τυχαία μεταβλητή

$\Rightarrow$ Αν X τυχαία μεταβλητή, η κατανομή της X είναι το μέτρο στο $\mathbb{R}$: $\boxed{\mu_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)}$

· Συνάρτηση κατανομής του X ορίζεται ως $\boxed{F_X(t) = \mathbb{P}(\{X \leq t\})}$

Ερώτημα:

1) Αν $\mu_X = \mu_Y \Rightarrow X = Y$? (όχι: Αν έχουν διαφορετικό Δ.Χ. αλλά $\mu_X = \mu_Y \not\Rightarrow X = Y$)

2) Αν $F_X = F_Y \Rightarrow \mu_X = \mu_Y$?
$\downarrow$ Σωστό

Απόδειξη:
Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{(-\infty, t], t \in \mathbb{R}\}$ και $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mu_X(A) = \mu_Y(A)\}$

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$

(Αν $\mathcal{L}$ ήταν σ-άλγεβρα, τότε θα είχαμε το ζητούμενο. Ωστόσο, δεν είναι πάντα!)

Ιδιότητες της $\mathcal{L}$:

· Αν $A, B \in \mathcal{L}$ και είναι ξένα, τότε $A \cup B \in \mathcal{L}$ (Γενικά, αν $A_i \in \mathcal{L}$ ξένα $\bigcup A_i \in \mathcal{L}$)

· Αν $A \subseteq B \in \mathcal{L}$, τότε $B \setminus A \in \mathcal{L}$

Μια οικογένεια με αυτές τις ιδιότητες, θα λέγεται λ-σύστημα ή κλάση Dynkin.

π-σύστημα:
Αν η τομή είναι μέσα στην οικογένεια

Θεώρημα Dynkin:

Αν ένα λ-σύστημα $\mathcal{L}$ περιέχει ένα π-σύστημα $\mathcal{A}$, τότε $\mathcal{L} \supseteq \sigma(\mathcal{A})$

Βήματα της απόδειξης:

1. Έστω $\mathcal{L}_0$ το ελάχιστο λ-σύστημα που περιέχει το $\mathcal{A}$. Αρκεί, $\mathcal{L}_0$ να είναι π-σύστημα (γιατί τότε είναι σ-άλγεβρα)
2. Ορίζω $C = \{A \subseteq \Omega : A \cap B \in \mathcal{L}_0 \ \forall B \in \mathcal{A}\}$
   Δείχνω ότι το C είναι λ-σύστημα, και άρα $C \supseteq \mathcal{L}_0$
   Τότε, $A \cap B \in \mathcal{L}_0$ όταν $A \in \mathcal{L}_0$ και $B \in \mathcal{A}$.
3. Ορίζουμε $C_1 = \{A \subseteq \Omega : A \cap B \in \mathcal{L}_0 \ \forall B \in \mathcal{L}_0\}$
   Τότε $C_1 \supseteq \mathcal{A}$ και C_1 είναι λ-σύστημα, οπότε $C_1 \supseteq \mathcal{L}_0$.
   Άρα, $\forall A, B \in \mathcal{L}_0$, $A \cap B \in \mathcal{L}_0$, άρα $\mathcal{L}_0$ είναι π-σύστημα.