Προπτυχιακό μάθημα

ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ και MODULES

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

26 Ιανουαρίου του 2024

ώρα 9-12

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

Ο διδάσκων

Ιωάννης Αντωνιάδης

Ομότιμος Καθηγητής

του Πανεπιστημίου Κρήτης

ΘΕΜΑ 1° (α)

Η απόδειξη είναι standard

$M_1 \leq M_1 + M_2$, $M_1 \cap M_2 \leq M_2$

Θεωρούμε την απεικ

$$\varphi : M_1 + M_2 \longrightarrow M_2 / M_1 \cap M_2$$

$$m_1 + m_2 \longmapsto m_2 + (M_1 \cap M_2)$$

Είναι καλά ορισμένη

(Αυτό είναι απαραίτητο, αφού έχουμε άθροισμα απλό, όχι ευθύ)

Επίσης είναι επιμορφισμός από R-modules.

Τέλος $\ker \varphi = M_1$

ΘΕΜΑ 1 (b)

Έστω R Π.Κ.Ι και $M = Rx = \langle x \rangle$ κυκλικό R-module με $Ann(x) = \langle \alpha \rangle \neq \langle 0 \rangle$

έστω $N \leq M$ (N R-υπομodule του M)

τότε να αποδείξετε ότι το N είναι κυκλικό με $Ann\, N = \langle b \rangle$, όπου $b \mid \alpha$.

ΑΠ

Ορίζουμε τον ομομορ. των R-modules

$\varphi(r) = rx$

Αφού M κυκλικό με γεννήτορα το x.

$\Rightarrow \varphi$ επιμ.

και $\ker\varphi = \{r \in R \mid rx = 0\} = Ann(x) = \langle \alpha \rangle$

$\Rightarrow R/\ker\varphi \cong M$

$\Rightarrow \exists$ ισομ. $\bar{\varphi}: R/\langle \alpha \rangle \cong M$

2° Θεωρ. ισομ. η φ μας δίνει 1-1 αμφ. και

επί αντιστοιχία

ανάμεσα στα

(R-υπομ του M) και

(τα R-υπομ. του R τα οποία περιέχουν το $\langle \alpha \rangle = \ker\varphi$)

Το N = R-υπομ του M

$\Rightarrow \varphi^{-1}(N)$ R-υπομ. του R τ.ω $\langle \alpha \rangle \leq \varphi^{-1}(N)$

Αλλά το $\varphi^{-1}(N)$ είναι R-υπομ του R

δηλαδή ένα ιδεώδες του R

και, επειδή R Π.Κ.Ι.

$\Rightarrow \underline{\varphi^{-1}(N) = \langle b \rangle \supseteq \langle a \rangle}$

$\Rightarrow N = \varphi(\langle a \rangle) = \{ r(cx) \mid r \in R \}$

καθώς και ότι

$Ann(N) = \{ r \in R / r(cx) = 0 \} = \{ r \in R \mid (r \cdot c)x = 0 \}$

$= \{ r \in R \mid r \cdot c \in Ann(x) \} =$

$= \{ r \in R \mid r \cdot c \in \langle a \rangle \}$

$= \{ r \in R \mid r \cdot c = a \cdot \lambda ;\ \lambda \in R \}$

$= \{ r \in R \mid r = \frac{a}{c} \cdot \lambda \mid \lambda \in R \} = \langle \frac{a}{c} \rangle$

δηλαδή ο μηδενιστής του N, $Ann(N)$

παράγεται από το $b := \frac{a}{c}$ το οποίο

είναι ένας διαιρέτης του a.

ΘΕΜΑ 2° (α)

Να αποδείξετε ότι το αλγεβρικό σύνολο

$\mathbb{V}(Y-X^2) \subseteq \mathbb{C}^2$ είναι ανάγωγο

Απ Αρκεί να αποδ. ότι το ιδεώδ $\langle Y-X^2 \rangle$ πρώτο

πολυώνυμο

$f(X,Y) = Y-X^2 \in \mathbb{C}[X,Y]$

είναι ~~πρώτο~~ ανάγωγο

Ορίζουμε

$$\Phi : \mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{C}[t]$$
$$f(X,Y) \longmapsto f(t,t^2)$$

Η Φ ομομ. δακτυλίων. (προφανές)

Η Φ επιμορφισμός

Αν $g(t) \in \mathbb{C}[t]$

$g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n$

$\exists\ f(X,Y) := a_0 + a_1 X + a_2 X + a_3 XY + \cdots$

τ.ω. $\Phi(f(X,Y)) = \mathbb{C}[t]$

Ο πυρήνας του ομομορφισμού είναι

$\ker \Phi = \langle Y-X^2 \rangle$

Απ για $f(X,Y) = Y - X^2$

έχουμε $\Phi(f(X,Y)) = f(t,t^2) = t^2 - t^2 = 0$

$\Rightarrow (Y - X^2) \in \ker\Phi$

$\Rightarrow \langle Y - X^2 \rangle \subseteq \ker\Phi$

Αντίστροφα Έστω

$g(X,Y) \in \ker\Phi \Rightarrow \Phi(g(X,Y)) = 0$

$\Rightarrow g(t,t^2) \equiv 0$ (ως πολ. του t)

$\mathbb{C}[X,Y] = (\mathbb{C}[X])[Y]$ Διαίρεση εδώ

$g(X,Y) = (Y - X^2)h(X,Y) + k(X)$

$g(t,t^2) = 0 \Rightarrow g(t,t^2) = k(t) = 0$

$\Rightarrow k(X) = 0$

$\Rightarrow g(X,Y) = (Y - X^2)h(X,Y)$

$\Rightarrow g \in \langle Y - X^2 \rangle$

$\Rightarrow \ker\Phi \subseteq \langle Y - X^2 \rangle$

$\Rightarrow$ Η ισότητα: $\boxed{\ker\Phi = \langle Y - X^2 \rangle}$

Επομένως $\dfrac{\mathbb{C}[X,Y]}{\langle Y - X^2 \rangle} \cong \mathbb{C}[t]$

$\mathbb{C}[t]$ ακέραια περιοχή $\Rightarrow \langle Y - X^2 \rangle$ πρώτο ιδεώδες $\Rightarrow \mathbb{V}(Y - X^2)$ ανάγωγο

ΘΕΜΑ 2° (b)

Στον δακτύλιο $R = \mathbb{C}[X,Y]$

θεωρούμε το ιδεώδες
$$A = \langle X^2+Y^2-1, Y-1 \rangle$$

Να αποδείξετε ότι $A = \langle X^2, Y-1 \rangle$

Ποιό είναι το ριζικό $Rad(A)$;

Να βρείτε ένα πολυώνυμο
$f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y] \overset{\Delta}{=} R$

τ.ω. $f \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(A)) \setminus A$

<u>Απόδειξη</u>

"$\subseteq$" $Y-1 \in \langle X^2, Y-1 \rangle$. Το $Y+1 \in R$

$\Rightarrow (Y-1)(Y+1) = Y^2-1 \in \langle X^2, Y-1 \rangle$

Τώρα $\left.\begin{array}{l} X^2 \in \langle X^2, Y-1 \rangle \\ Y^2-1 \in \langle X^2, Y-1 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow X^2+Y^2-1 \in \langle X^2, Y-1 \rangle$

Επομένως $A \subseteq \langle X^2, Y-1 \rangle$

"$\supseteq$" Αντίστροφα $X^2+Y^2-1 \in A$

και $Y-1 \in A \rightsquigarrow (Y-1)(Y+1) =$

$= \underline{Y^2-1 \in A}$

Επομένως $X^2 = (X^2+Y^2-1) - (Y^2-1) \in A$

$\left.\begin{array}{l} X^2 \in A \\ Y-1 \in A \end{array}\right\} \Rightarrow \langle X^2, Y-1 \rangle \subseteq A$

Άρα η <u>ισότητα</u>

Το ριζικό του A είναι

$$Rad(A) = \langle X, Y-1 \rangle$$

(αφού $(Y-1)^1 \in A$ και $X^2 \in A$)

Τώρα, δεδομένου ότι $A \neq Rad(A)$ (δεν ισχύει για το A το NSS, για το A)

δηλ. $\mathbb{I}(\mathbb{V}(A)) = Rad(A)$

Επομένως, αρκεί να πάρουμε $f \in Rad(A) = \mathbb{I}(\mathbb{V}(A))$, αλλά $f \notin A$.

π.χ. $f = 5X + 7(Y-1)$

ΘΕΜΑ 3° (α)

Έστω R δακτ. (μεταθ. $1\in R$)

$S\subseteq R$ πολλαπλασιαστικά κλειστό και $P\trianglelefteq R$ (ιδεώδες R όχι εκ των προτέρων πρώτο) τ.ω.

$P\cap S=\emptyset$ και maximal ως προς τη σχέση "$\subseteq$"

(δηλ. αν $P'\trianglelefteq R$ (ιδ. R) τ.ω. $P\subsetneq P'$

$\Rightarrow P'\cap S\neq\emptyset$)

Τότε να αποδ. ότι το P είναι πρώτο

Απ. Έστω P όχι πρώτο

$\Rightarrow \exists\, x,y\in R$ τ.ω. $xy\in R$, $x\notin P$ και $y\notin P$

Αφού $x\in P$

$\Rightarrow P\subsetneq \langle P,x\rangle = P+xR$

Από την υπόθεση $\langle P,x\rangle\cap S\neq\emptyset$

$\Rightarrow \exists\, s_1\in S$ τ.ω. $s_1\in\langle P,x\rangle$

$\Rightarrow s_1=p_1+\lambda_1 x \mid p_1\in P,\ \lambda_1\in R$

Ομοίως $\exists\, s_2\in\langle P,y\rangle$, $s_2=p_2+\lambda_2 y \mid$ $p_2\in P,\ \lambda_2\in R$

Τώρα S κλειστό $\Rightarrow s_1\cdot s_2\in S$

$$s_1\cdot s_2=(p_1+\lambda_1 x)(p_2+\lambda_2 y)=\underbrace{(\quad)}_{\in P}+\underbrace{\lambda_1\lambda_2 xy}_{\in P}$$

$\Rightarrow s_1\cdot s_2\in P \} \Rightarrow P\cap S\neq\emptyset$ άτοπο

ΘΕΜΑ 3° (b)

Αφού M πεπερ. παραγ. $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2, \dots x_n \in M$

τ.ω $M = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle_R$

"$\Rightarrow$" Έστω ότι $S^{-1}M = 0$

Για κάθε $x_i \in M$ $(i=1,2,\dots,n)$ έχουμε

$\frac{x_i}{1} \in S^{-1}M = 0 \Rightarrow \exists\, s_i \in S$ τ.ω $s_i x_i = 0, \ \forall\, i=1,2,\dots,n$

Αν $s := s_1 s_2 \dots s_n \in S$ έχουμε $s \cdot M = 0$

"$\Leftarrow$" Έστω τώρα $s \cdot M = 0$ $(s \in S)$

Θα αποδ. ότι $S^{-1}M = 0$

Έστω $m \in M$, $t \in S \Rightarrow \frac{m}{t} \in S^{-1}M$

Το $s \in S$, εξ υποθ. $s \cdot m = 0, \ \forall\, m \in M$

Άρα $\frac{m}{t} = \frac{0}{1}$, αφού $\exists\, s$ (αυτό της υποθ)

τ.ω $(m \cdot 1 - 0 \cdot t)s = 0$

Τελικά $S^{-1}M = 0$

ΘΕΜΑ 4ο (α)

Αν R είναι Π.Μ.Α

Να αποδείξετε ότι ο R είναι ακέραια κλειστός δακτύλιος

Απ. Standard, διαδικασία.

Κάθε $a \in R$ είναι, προφανώς R ακέραιος

Έστω $K = Quot(R)$

και $x = \frac{p}{q} \in K$, $p, q \in R$, $q \neq 0$ και $(p,q)=1$

Υποθ. ότι x R-ακερ.

$\Rightarrow x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0 \quad | c_i \in R$

$\Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + c_0 = 0$

$\Rightarrow p^n = -q(c_{n-1}p^{n-1} + \dots + c_0 q^n)$

$\Rightarrow q \mid p^n$. Αλλά $(p,q)=1$. (Αν π ένας ανάγωγος διαιρέτης του q, τότε

$\pi \mid q \mid p^n \Rightarrow \pi \mid p^n$ και π ανάγωγο

$\Rightarrow \pi \mid p$, αλλά τότε $\pi \mid (p,q)=1$, άτοπο!)

Επομ. το q δεν διαιρείται από ανάγωγο στοιχείο $\Rightarrow q \in R^* \Rightarrow q^{-1} \in R$

Επομένως, $x = \frac{p}{q} = \frac{p \cdot q^{-1}}{q \cdot q^{-1}} = p \cdot q^{-1} \in R$

$\Rightarrow R$ ακέραια κλειστός

ΘΕΜΑ 4° (b)

Έστω $R \subseteq R'$ ακέραιες περιοχές και R' είναι R-ακέραιος. Να αποδείξετε ότι

$(R'$ σώμα$) \Longleftrightarrow (R$ σώμα$)$

Αποδ. "$\Leftarrow$" Έστω R σώμα και $x \in R'$, $x \neq 0$. Αφού R' R-ακερ. υπάρχουν $a_i \in R$ τ.ω

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Εδώ επιλέγουμε εξίσωση ελάχιστου βαθμού. Αφού R' ακερ. περιοχή

$\Rightarrow a_n \neq 0$. $(a_n \in R, a_n \neq 0, R$ σώμα $\Rightarrow a_n^{-1} \in R)$

$\Rightarrow x^{-1} = a_n^{-1}(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}) \in R'$

$\Rightarrow R'$ σώμα

Αντίστροφα Έστω R' σώμα και $a \in R$, $a \neq 0$.

$a \in R \subseteq R' \Rightarrow [a \in R', a \neq 0, a$ σώμα$]$

$\Rightarrow a^{-1} \in R'$. R' είναι R-ακερ.

$\Rightarrow$ για το a^{-1} υπάρχει εξίσωση (μονικού πολυων.)

$$(a^{-1})^m + b_1 (a^{-1})^{m-1} + \dots + b_m = 0, \quad b_i \in R$$

$\Rightarrow a^{-1} = -(b_1 + b_2 a + \dots + b_m a^{m-1}) \in R$

$\Rightarrow R$ σώμα.

Πίσω

(α)

Ίσως ως (b)

Έστω $R \subseteq R'$ δακτύλιοι και R' R-ακέραιο

Αν $Q \in Spec(R')$ τότε έστω
$$P = Q^c = Q \cap R$$

Να αποδ. ότι
(Q maximal του R') $\Longleftrightarrow$ (P max του R)

Από προηγ. πρόταση (την αποδείξαμε)

R' R-ακερ. $\Rightarrow$ R'/Q, R/P - ακέρ

και αφού Q πρώτο $\Rightarrow$ R'/Q ακέρ περ.

και R/P $P = Q \cap R$ πρώτο του R

$\Rightarrow$ R/P ακέρ. περιοχή

Οπότε από το (α) $\Longrightarrow$

R'/Q σώμα $\Longleftrightarrow$ $\frac{R}{P}$ σώμα

$\Updownarrow$

Q max. R' $\Longleftrightarrow$ P max του R