Προπτυχιακό μάθημα

ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ και MODULES

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

26 Ιανουαρίου του 2024

ώρα 9 - 12

Ο διδάσκων

Ιωάννης Αντωνιάδης

Ομότιμος Καθηγητής

του Πανεπιστημίου Κρήτης

Θέμα 1º

(α) Έστω M ένα R-module και
$M_1 \leq M$, $M_2 \leq M$

Να αποδείξετε ότι
$$\frac{M_1+M_2}{M_1} \cong \frac{M_2}{M_1 \cap M_2}$$

(b) Αν R Π.Κ.Ι. και $M = Rx = \langle x \rangle$ ένα κυκλικό R-module με
$Ann(x) = \langle \alpha \rangle \neq \langle 0 \rangle$
Έστω $N \leq M$. Να αποδείξετε ότι το N είναι και αυτό κυκλικό R-module με $Ann\, N = \langle b \rangle$, όπου $b \underset{R}{|} \alpha$

(Υπόδειξη: Να ορίσετε έναν, κατάλληλο, ομομορφισμό των R-modules R και M.)

Θέμα 2°

(a) Να αποδείξετε ότι το <u>αλγεβρικό σύνολο</u> $\mathbb{V}(Y-X^2) \subseteq \mathbb{C}^2$ είναι <u>ανάγωγο</u>

(b) Στον δακτύλιο $R=\mathbb{C}[X,Y]$, θεωρούμε το ιδεώδες

$$A = \langle X^2+Y^2-1,\ Y-1 \rangle$$

Να αποδείξετε ότι $A = \langle X^2, Y-1 \rangle$

Ποιό είναι το <u>ριζικό</u> $\mathrm{Rad}(A)$;

Να βρείτε ένα πολυώνυμο

$$f(X,Y) \in R = \mathbb{C}[X,Y]$$

τ.ω $f \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(A)) \setminus A$

Θέμα 3°

(a) Έστω R δακτύλιος και $S \subseteq R$ πολλαπλασιαστικά κλειστό, υποσύνολο του R.
Έστω επίσης $A \trianglelefteq R$ τ.ω $A \cap S = \phi$ και το A είναι maximal ως προς τη σχέση αυτή. (Δηλαδή, αν $B \trianglelefteq R$ τ.ω $A \subsetneq B \Rightarrow B \cap S \neq \phi$)

Να αποδείξετε ότι το $A =: P$ είναι, κατ' ανάγκη πρώτο ιδεώδες του R

(b) Αν S πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του δακτυλίου R και M πεπερασμένα παραγόμενο R-module.
Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$S^{-1}M = 0 \iff \exists s \in S \text{ τ.ω. } s \cdot M = 0$$

—

Θέμα 4°

(α) Έστω R Π.Μ.Α. Να αποδείξετε ότι ο R είναι ακέραια κλειστός.

b) Υποθέτουμε, ότι R, R' ακέραιες περιοχές, $R \leq R'$ και ότι ο R' είναι R-ακέραιος.

Να αποδείξετε ότι

(R' σώμα) $\Longleftrightarrow$ (R σώμα)